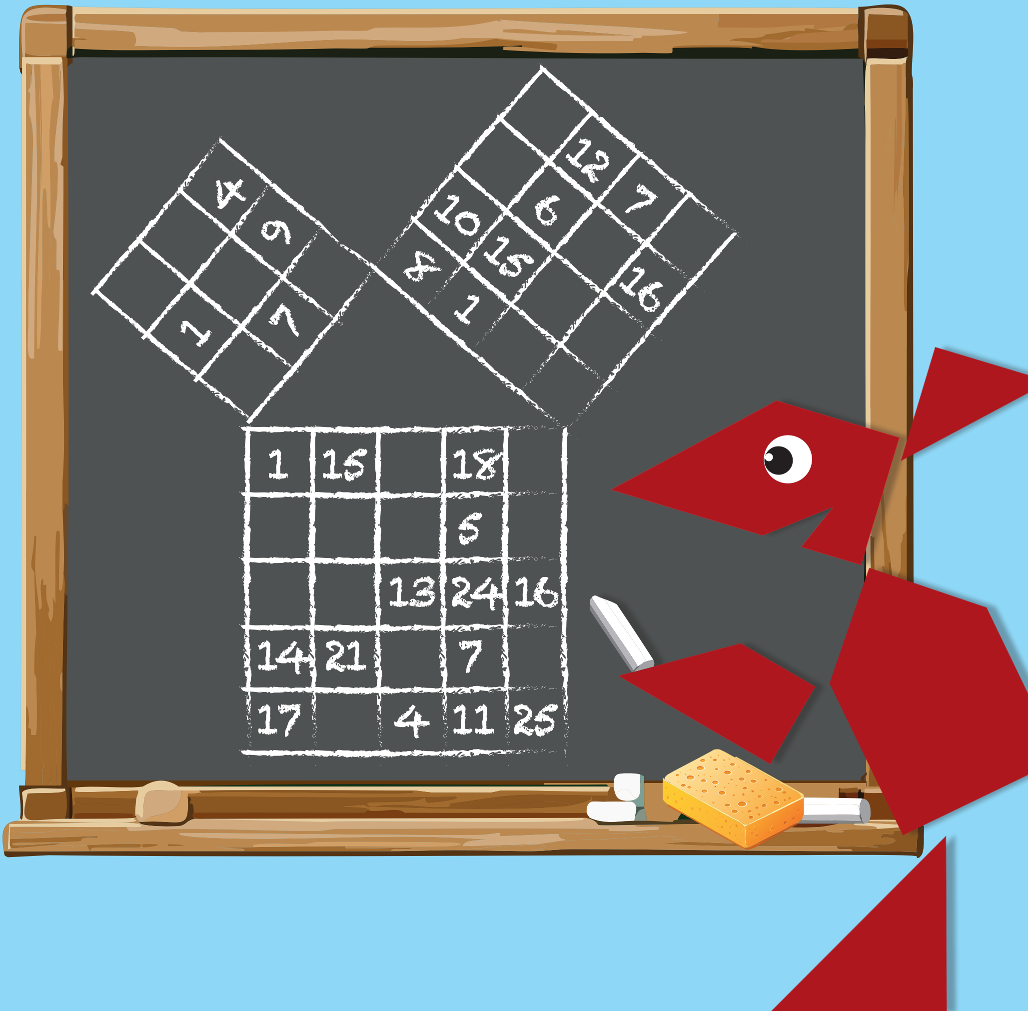
$(20+25)^2$

Mathe mit dem Känguru



Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmende am Wettbewerb *Känguru der Mathematik 2025*,

nach der ersten Durchführung am 20. März 2003, fand in diesem Jahr der Känguru-Wettbewerb in der Schweiz zum 23. Mal statt, wenn man das Coronajahr 2020 mitzählt, bei dem es den Schulen überlassen war, ob und wie sie den Wettbewerb durchführen. Wie schon letztes Jahr haben heuer mehr als 60 000 Schülerinnen und Schüler teilgenommen. Ein herzliches Dankeschön gilt den Koordinatoren und Koordinatorinnen der zugehörigen Schulen, die den Wettbewerb vor Ort organisiert haben, um mit uns gemeinsam die Lust auf Mathematik zu fördern. Wir hoffen, dass sich alle Teilnehmenden mit Freude mit den mathematischen Problemen beschäftigt und Lust auf weitere bekommen haben.

Zusammen mit der Schweiz haben sich Kinder und Jugendliche in mehr als 100 Ländern weltweit an den Aufgaben versucht. Im internationalen Verein *Kangourou sans frontières* arbeiten alle diese Länder zusammen. Die vielen hübschen oder ungewöhnlichen Fragestellungen sowie überhaupt die Vielgestaltigkeit der Aufgaben rühren daher, dass sehr unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus verschiedenen Kulturen einfliessen. In der Broschüre ist angegeben, aus welchen Ländern die Vorschläge für die Aufgaben kamen.

Känguru-Teilnehmerländer 2025

Es gab Fragestellungen zu einer Speisekarte, einem Verpackungsautomaten für Schokoladen-Osterhasen und den Trainingszeiten einer Volleyballmannschaft. Ein Einkauf beim Bäcker, die Anzeige von Fotos auf dem Smartphone und gestapelte Pakete waren Thema in anderen Aufgaben. Richtiges Rechnen war natürlich gefragt, aber vor allem kluges Denken. Vorstellungsvermögen, eine Portion Logik und geschicktes Kombinieren halfen, auch die härtesten Nüsse zu knacken. Das alles sind Fertigkeiten, die im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt werden und die uns im täglichen Leben helfen, Fragen und Problemen durch mathematisches Denken, logisches Schliessen und Strukturieren mit klugen Lösungen zu begegnen.

Känguru Schweiz hat auch dieses Jahr den Wettbewerb für die Sekundarstufe in Deutsch, Englisch und Französisch angeboten. Für die Übersetzungen und den online-Satz im Wettbewerbssystem danken wir herzlich unseren Helferinnen Mina Camenisch und Marie Haas sowie Loïc Cellier und Anne Garufo fürs Französisch und Sophie und Scott Goldie fürs Englisch.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von Martin Altmann, Deindra Hanzig, Dr. Monika Noack und Alexander Unger unter Mitwirkung von Dr. Meike Akveld, Maria Cannizzo, René Fehlmann, Bertram Hell, Ella, Birgit und Ulf Hutschenreiter, Dr. Marion Jarmer, Dima Nikolenkov, Dr. Antje Noack, Angelika Rupflin, Andreas Stahel, Dr. Dorothea Vigerske, und Dr. Renate Winkler erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V., www.mathe-kaenguru.de
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein *Känguru Schweiz* www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 7 und 8

1. An meinem Kühlschrank haften vier Magnete mit Ziffern darauf .
Welche ist die grösste Zahl, die sich aus ihnen bilden lässt?

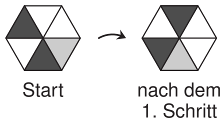
Österreich

(**A**) 2052 (**B**) 5202 (**C**) 2502 (**D**) 5220 (**E**) 5022

Lösung: Die grösste Zahl, die sich mit den Magneten bilden lässt, ist 5220.
— In Klassenstufe 9/10 wurde in Aufgabe 8 nach allen möglichen Zahlen aus diesen Ziffern gefragt. —

2. Finn hat ein sechseckiges Blatt Papier. Er dreht es schrittweise immer ein Feld im Uhrzeigersinn. Nach welcher der folgenden Schrittzahlen liegt das Blatt wieder wie am Anfang?

Deutschland



(**A**) 14 (**B**) 17 (**C**) 10 (**D**) 15 (**E**) 12

Lösung: Nach 6 Schritten liegt das Blatt zum ersten Mal wieder wie am Anfang. Deshalb liegt das Blatt auch nach jeder Schrittzahl, die ein Vielfaches von 6 ist, wieder wie am Anfang. Das einzige Vielfache von 6 in den Antwortmöglichkeiten ist 12, daher ist dies die richtige Antwort.

3. Vivienne möchte die vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 in die vier Kästchen der Rechnung schreiben.
Welches ist das <u>kleinste</u> Ergebnis, das Vivienne erhalten kann?

Deutschland

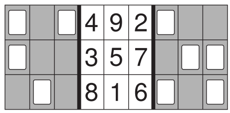
$$\square - \square + \square - \square$$

(**A**) –3 (**B**) –4 (**C**) –5 (**D**) –6 (**E**) –7

Lösung: Vivienne erhält das kleinstmögliche Ergebnis, wenn sie die beiden grössten Zahlen, 3 und 4, in die beiden Kästchen mit einem Minus davor schreibt und die Zahlen 1 und 2 in die beiden anderen Kästchen. Dann erhält sie $1 - 3 + 2 - 4 = -4$.

4. Eine Klappkarte mit Löchern wird an den dicken Linien gefaltet.
Nach dem Falten ist nur noch eine einzige Zahl zu sehen. Welche?

Tunesien

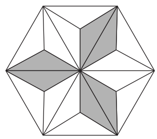


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Wenn nur die linke Klappe an der dicken Linie nach innen gefaltet wird, so sind noch die Zahlen 4, 2, 7 und 1 zu sehen. Wenn nur die rechte Klappe an der dicken Linie nach innen gefaltet wird, so sind noch die Zahlen 2, 3, 5, 8 und 6 zu sehen. Nur die Zahl 2 ist in beiden Fällen noch zu sehen und damit auch, wenn beide Klappen nach innen gefaltet werden.
— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 9/10 die Aufgabe 1. —

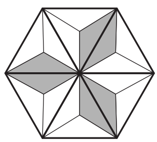
5. Das regelmässige Sechseck rechts ist in gleich grosse Dreiecke geteilt.
Welcher Anteil des Sechsecks ist grau?

Marokko



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Lösung: Wir zählen, dass das Sechseck in 18 gleich grosse Dreiecke geteilt ist. Von diesen sind 6 grau gefärbt, das ist ein Anteil von $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
Wer weiss, dass sich ein regelmässiges Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke zerlegen lässt, sieht direkt, dass der gesuchte Anteil $\frac{1}{3}$ ist, da in jedem dieser Dreiecke eines von 3 der enthaltenen Dreiecke grau ist.



6. Louisa ist am 56. Geburtstag ihres Grossvaters geboren. Heute feiern die beiden gemeinsam Geburtstag. Sie sind zusammen 100 Jahre alt. Wie alt ist Louisa?

Grossbritannien

(**A**) 31 (**B**) 29 (**C**) 25 (**D**) 24 (**E**) 22

Lösung: Als Louisa geboren wurde, waren ihr Grossvater und sie zusammen 56 Jahre alt. Heute sind die beiden zusammen 100 − 56 = 44 Jahre älter. Folglich sind beide seit Louisas Geburt um die Hälfte, also 44 : 2 = 22 Jahre, älter geworden. Louisa ist somit 22 Jahre alt.

7. Vor meinem Lieblings-Burger-Restaurant steht eine Tafel mit der Speisekarte. Der Regen hat einige der Zahlen weggewaschen. Ich weiss, dass die Burger von oben nach unten teurer werden.
Wie viel kostet ein Deluxe-Burger mindestens?

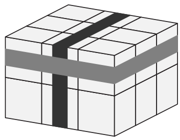
Deutschland

(**A**) 5,80 (**B**) 6,80 (**C**) 7,80 (**D**) 8,80 (**E**) 9,80

Lösung: Jeder Burger hat einen höheren Preis als derjenige direkt darüber. Der kleinste Preis, den der Burger *Klassisch* haben kann, ist 4,30. Der Burger *Bacon* kostet mindestens 4,60 und der Burger *Viel Käse* kostet mindestens 5,50. Der kleinste Preis, den der Burger *Doppelter* haben kann, ist 6,10. Damit kostet der Burger *Deluxe* mindestens 6,80.

8. Es sind 18 Würfel so gestapelt, dass sie einen Quader bilden. Um den Quader sind zwei Bänder rundherum gebunden.
Wie viele der Würfel berühren mindestens eines der Bänder?

Dänemark



(**A**) 15 (**B**) 13 (**C**) 12 (**D**) 11 (**E**) 9

Lösung: In der oberen Schicht berühren alle 9 Würfel mindestens eines der Bänder. In der unteren Schicht berühren nur die drei Würfel in der mittleren Reihe eines der Bänder, und zwar das schwarze. Insgesamt berühren daher 9 + 3 = 12 Würfel mindestens eines der Bänder.
Eine andere Herangehensweise ist es zu zählen, wie viele Würfel keines der Bänder berühren. Das sind 6 der unteren Würfel. Von allen 18 Würfeln berühren daher 18 − 6 = 12 mindestens eines der Bänder.

9. Der neue Osterhasen-Verpackungsautomat verpackt in jeweils 12 Minuten 100 Schokoladen-Osterhasen in Folie. Wie viele Schokoladen-Osterhasen verpackt der Automat in 12 Stunden?

Grossbritannien

(**A**) 6000 (**B**) 4500 (**C**) 3000 (**D**) 2400 (**E**) 1600

Lösung: In einer Stunde gibt es 60-mal eine Minute, also gibt es in 12 Stunden 60-mal 12 Minuten. Der Automat verpackt in 12 Stunden daher 60-mal so viele Schokoladen-Osterhasen wie in 12 Minuten, das sind 60 · 100 = 6000.

10. Sandra würfelt mit drei Spielwürfeln. Die Würfel zeigen zusammen 8 Augen. Jeder der drei Würfel zeigt eine andere Augenzahl. Welche Augenzahl ist sicher nicht dabei?

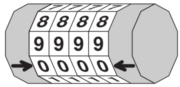
Norwegen

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir überlegen, wie wir mit drei verschiedenen Augenzahlen zusammen 8 Augen erhalten können. Die einzigen beiden Möglichkeiten sind 1, 2, 5 und 1, 3, 4. Jede der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 kann dabei sein, aber die Augenzahl 6 ist sicher nicht dabei.
Die Aufgabe kann auch wie folgt gelöst werden: Wäre die Augenzahl 6 dabei, so müssten die anderen beiden Würfel zusammen 8 − 6 = 2 Augen zeigen und ihre Augenzahlen müssten beide 1 sein. Dies widerspricht der Bedingung, dass jeder der drei Würfel eine andere Augenzahl zeigt.

11. Türkei

Bei meinem Fahrradschloss wird an den Pfeilen die richtige Kombination eingestellt. Im Moment steht dort 0000. Zwei Reihen oberhalb steht 8888. Nun stelle ich die richtige Kombination an den Pfeilen ein. Zwei Reihen oberhalb steht jetzt 2719. Welche ist die richtige Kombination?

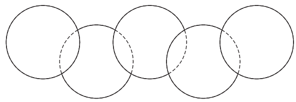


(**A**) 4931 (**B**) 4593 (**C**) 0531 (**D**) 4537 (**E**) 0937

Lösung: Steht zwei Reihen oberhalb der Pfeile eine 8, dann steht an den Pfeilen wie abgebildet eine 0. Steht zwei Reihen oberhalb eine 9, dann steht an den Pfeilen eine 1. In allen anderen Fällen ist die Zahl an den Pfeilen um 2 grösser als zwei Reihen oberhalb. Wenn zwei Reihen oberhalb 2719 steht, so steht an den Pfeilen 4931, das ist die richtige Kombination.

12. Afghanistan

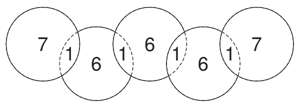
Die Figur rechts wird von fünf Kreisen mit einem Flächeninhalt von jeweils $8\,\text{cm}^2$ gebildet. Die Flächen, an denen zwei Kreise überlappen, haben jeweils einen Flächeninhalt von $1\,\text{cm}^2$.
Welchen Flächeninhalt hat die gesamte Figur?



(**A**) $31\,\text{cm}^2$ (**B**) $34\,\text{cm}^2$ (**C**) $36\,\text{cm}^2$ (**D**) $38\,\text{cm}^2$ (**E**) $39\,\text{cm}^2$

Lösung: Die Summe der Flächeninhalte der fünf Kreise ist $5 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 40\,\text{cm}^2$. In dieser Summe sind die Flächeninhalte der vier Flächen, an denen zwei Kreise überlappen, doppelt enthalten. Diese haben zusammen einen Flächeninhalt von $4 \cdot 1\,\text{cm}^2 = 4\,\text{cm}^2$. Daher hat die gesamte Figur einen Flächeninhalt von $40\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$.

Lösungsvariante: Die Aufgabe lässt sich auch gut lösen, indem wir im Bild die Flächeninhalte der einzelnen Flächen eintragen.
Die Flächen, an denen zwei Kreise überlappen, haben jeweils einen Flächeninhalt von $1\,\text{cm}^2$. Folglich haben die beiden äusseren Flächen den Flächeninhalt $7\,\text{cm}^2$ und die drei restlichen Flächen den Flächeninhalt $6\,\text{cm}^2$. Wegen $4 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 36$ hat die gesamte Figur den Flächeninhalt $36\,\text{cm}^2$.



13. Uganda

In der Halle findet ein Hürdenlauf über 60 Meter statt. Die 5 Hürden sind schon aufgebaut. Die erste Hürde steht 12 Meter nach dem Start. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Hürden beträgt jeweils 8 Meter. Wie weit ist die letzte Hürde vom Ziel entfernt?

(**A**) 18 Meter (**B**) 16 Meter (**C**) 14 Meter (**D**) 12 Meter (**E**) 10 Meter

Lösung: Die erste Hürde steht 12 Meter nach dem Start. Danach stehen noch 4 weitere Hürden. Die letzte Hürde steht folglich $12\,\text{m} + 4 \cdot 8\,\text{m} = 44\,\text{m}$ nach dem Start, also $60\,\text{m} - 44\,\text{m} = 16\,\text{m}$ vom Ziel entfernt.

14. Spanien

Werner trainiert auf einem Laufband im Fitnessstudio. Dabei schaut er immer wieder auf zwei Stoppuhren. Die erste gibt die Zeit an, die seit dem Trainingsstart vergangen ist, und die zweite die Zeit, die noch bis zum Ende des Trainings bleibt. Werner freut sich, als beide Stoppuhren dasselbe anzeigen. Was zeigen sie dann?

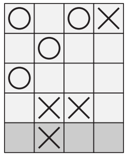
14:58	21:32

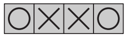
(**A**) 17:45 (**B**) 17:50 (**C**) 18:00 (**D**) 18:15 (**E**) 18:20

Lösung: Da die erste Uhr die Zeit angibt, die seit dem Trainingsstart vergangen ist, und die zweite Uhr die Zeit, die noch bis zum Ende des Trainings bleibt, ist die Summe der angezeigten Zeiten stets die gesamte Trainingszeit. Diese beträgt 14 min 58 s + 21 min 32 s = 36 min 30 s. Genau nach der Hälfte des Trainings zeigen beiden Uhren die Hälfte der Trainingszeit an, und zwar 18:15.

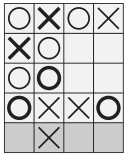
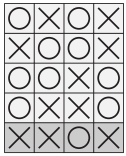
15. Polen

In dem abgebildeten Rechteck soll in jedes Kästchen entweder ein Kreis oder ein Kreuz eingetragen werden. In keiner waagerechten oder senkrechten Linie dürfen 3 Kreise oder 3 Kreuze unmittelbar aufeinander folgen. Wie muss die unterste Zeile ausgefüllt werden?



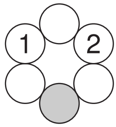
(**A**)  (**B**)  (**C**) 
(**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir füllen die Kästchen Schritt für Schritt aus. Immer, wenn in drei aufeinander folgenden Feldern zweimal dasselbe Symbol vorkommt, muss in das dritte Feld das jeweils andere Symbol eingetragen werden. Zu Beginn können wir so fünf Kästchen ausfüllen, siehe linkes Bild. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir das vollständig ausgefüllte Rechteck, siehe rechtes Bild. Die unterste Zeile ist wie in (**D**) ausgefüllt.

16. Belarus

In jeden der Kreise rechts soll eine Zahl eingetragen werden. Jede Zahl soll die Summe der beiden Zahlen in den benachbarten Kreisen sein. Zwei Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahl gehört in den grauen Kreis?



(**A**) 0 (**B**) -1 (**C**) -2 (**D**) -3 (**E**) -5

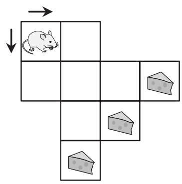
Lösung: Im Kreis zwischen den Kreisen mit der 1 und der 2 soll die Summe der beiden stehen, also 3. Da die 1 die Summe der Zahlen in den benachbarten Kreisen ist, steht unterhalb des Kreises mit der 1 wegen $3 + (-2) = 1$ die Zahl -2. Da die 2 die Summe der Zahlen in den benachbarten Kreisen ist, steht unterhalb des Kreises mit der 2 wegen $3 + (-1) = 2$ die Zahl -1. In den grauen Kreis gehört $(-2) + (-1) = -3$.

17. USA

Auf einer Burg sind alle Ritter entweder edle Ritter, die immer die Wahrheit sagen, oder Raubritter, die immer lügen. Es sind 8 edle Ritter mehr als Raubritter. Jeder Ritter wurde gefragt: „Bist du ein edler Ritter?" Alle haben geantwortet, und 20-mal war die Antwort „Ja". Wie viele Raubritter gibt es auf der Burg?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Auf die Frage „Bist du ein edler Ritter?" antworten alle edlen Ritter mit „Ja"und alle Raubritter, weil sie lügen, ebenfalls mit „Ja". Die Anzahl 20 der „Ja"-Antworten entspricht also der Gesamtanzahl der Ritter. Würden 8 edle Ritter die Burg verlassen, so wären von den übrigen $20 - 8 = 12$ Rittern gleich viele edle Ritter wie Raubritter. Daher sind es $12 : 2 = 6$ Raubritter.

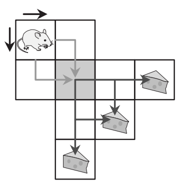


18. Vietnam

Die Maus Niki möchte zu einem Käsestück kommen. Niki läuft bei jedem Schritt ein Kästchen nach rechts oder ein Kästchen nach unten.
Wie viele verschiedene Wege gibt es für Niki, um zu einem Käsestück zu kommen?

(**A**) 10 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 6 (**E**) 5

Lösung: Jeder Weg vom Startkästchen zu einem der Käsestücke verläuft über das grau markierte Kästchen. Es gibt 2 Wege vom Startkästchen zum grauen Kästchen. Vom grauen Kästchen aus gibt es 4 Wege zu einem der Käsestücke. Jeder Weg lässt sich aus einem Weg vom Startkästchen zum grauen Kästchen und einem Weg vom grauen Kästchen zu einem Käsestück kombinieren. Folglich gibt es $2 \cdot 4 = 8$ Wege vom Startkästchen zu einem der Käsestücke.



19. Diego macht sich immer um 8 Uhr auf den Weg zur Schule. Diese ist 1 km entfernt. Wenn er zu Fuss geht, hat er eine Geschwindigkeit von 4 km/h und ist 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn da. Wenn er mit dem Fahrrad fährt, hat er eine Geschwindigkeit von 15 km/h.
Wie viele Minuten ist Diego dann vor Unterrichtsbeginn da?

USA

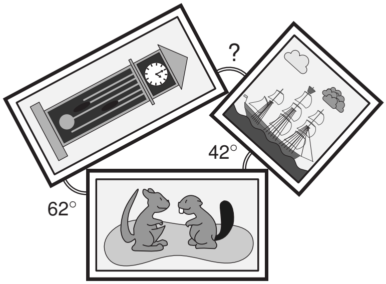
(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Zu Fuss geht Diego mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h, folglich braucht er für die Strecke von 1 km zur Schule $\frac{1}{4}$ einer Stunde, das heisst 15 Minuten. Er erreicht die Schule um 8:15 Uhr. Da er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn da ist, beginnt der Unterricht um 8:20 Uhr.
Mit dem Fahrrad braucht Diego mit der Geschwindigkeit von 15 km/h für dieselbe Strecke $\frac{1}{15}$ einer Stunde, das heisst 4 Minuten. Er kommt dann um 8:04 Uhr an, und das ist 16 Minuten vor Unterrichtsbeginn.
— Eine ähnliche, etwas schwierigere Aufgabe war in Klassenstufe 11–13 die Aufgabe 26. —

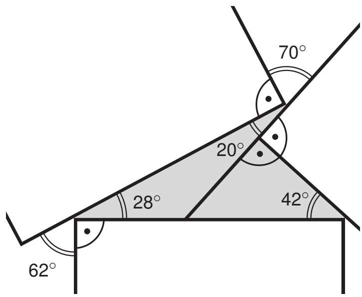
20. Drei rechteckige Fotos liegen wie abgebildet auf dem Tisch. Wie gross ist der mit dem Fragezeichen markierte Winkel?

Taiwan

(**A**) 68° (**B**) 70° (**C**) 72° (**D**) 74° (**E**) 78°

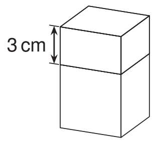


Lösung: Wir verlängern die linke Kante des Schiff-Fotos bis zum Tierfoto und bestimmen die Innenwinkel der beiden entstandenen Dreiecke.
Das rechte Dreieck ist rechtwinklig und der dritte Innenwinkel unten links ist 180° − 90° − 42° = 48° gross.
Im linken Dreieck ist der Innenwinkel unten rechts Nebenwinkel des 48°-Winkels und folglich 180° − 48° = 132° gross.
Der Innenwinkel unten links hat denselben Scheitelpunkt wie der gegebene 62°-Winkel und ist 180° − 90° − 62° = 28° gross.
Der obere Innenwinkel des linken Teildreiecks ist demnach 180° − 132° − 28° = 20° gross. Schliesslich hat der gesuchte Winkel denselben Scheitelpunkt wie der 20°-Winkel und ist somit 180° − 90° − 20° = 70° gross.



21. Die Höhe eines Quaders wird um 3 cm verkleinert. Der Oberflächeninhalt des Quaders verringert sich dadurch um 60 cm^2, und der Restkörper ist ein Würfel.
Wie gross war das Volumen des ursprünglichen Quaders?

China



(**A**) 75 cm^3 (**B**) 125 cm^3 (**C**) 150 cm^3 (**D**) 200 cm^3 (**E**) 225 cm^3

Lösung: Durch das Verkleinern des Quaders verringert sich die Oberfläche um einen Streifen, dessen Höhe 3 cm beträgt und dessen Länge gleich dem Umfang der quadratischen Grundfläche ist.
Da der Flächeninhalt des Streifens 60 cm^2 beträgt, muss seine Länge 60 cm^2 : 3 cm = 20 cm betragen. Daraus ergibt sich, dass die quadratische Grundfläche die Seitenlänge 20 cm : 4 = 5 cm hat. Die Kantenlängen des Quaders waren folglich 5 cm, 5 cm und 5 cm + 3 cm = 8 cm, woraus sich sein Volumen zu 5 cm · 5 cm · 8 cm = 200 cm^3 ergibt.

22. Die Buchstaben A, P und Y stehen für drei verschiedene einstellige Zahlen. Dabei gilt $Y = P+P = A+A+A$. Dann ist $P \cdot A \cdot P \cdot A \cdot Y \cdot A =$

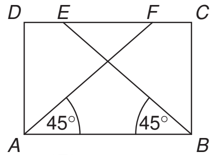
Grossbritannien

(**A**) 432 (**B**) 518 (**C**) 576 (**D**) 648 (**E**) 692

Lösung: Es gilt $Y = 2P$ und $Y = 3A$. Somit ist Y durch 2 und durch 3 teilbar. Da Y einstellig ist, muss $Y = 6$ oder $Y = 0$ gelten. Wäre $Y = 0$, so wären auch P und A gleich 0, was nicht möglich ist, da die drei Zahlen verschieden sind. Also gilt $Y = 6$, woraus $P = 3$ und $A = 2$ folgt. Damit erhalten wir $P \cdot A \cdot P \cdot A \cdot Y \cdot A = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 432$.

23. Im Rechteck $ABCD$ liegen die Punkte E und F so auf der Seite $\overline{CD}$, dass die Winkel BAF und EBA beide 45° gross sind und die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ einander schneiden. Ausserdem gilt $|AB|+|EF| = 20\,\text{cm}$. (*Abb. nicht massstabsgerecht*)
Wie lang ist die Seite $\overline{BC}$?

Estland



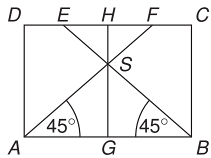
(**A**) 8 cm (**B**) 9 cm (**C**) 10 cm (**D**) 11 cm (**E**) 12 cm

Lösung: Alle Innenwinkel im Rechteck $ABCD$ sind 90° gross. Im Dreieck DAF ist der Winkel FAD daher $90° - 45° = 45°$ gross, der Winkel ADF ist 90° gross und der Winkel DFA ist somit $180° - 90° - 45° = 45°$ gross. Folglich ist das Dreieck DAF gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{AD}$ und $\overline{DF}$. Genauso ist das Dreieck CEB rechtwinklig und gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{BC}$ und $\overline{EC}$. Damit sind die Strecken $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{EC}$ und $\overline{BC}$ alle gleich lang.
Nun können wir die gegebene Gleichung umformen:

$$\begin{aligned} 20\,\text{cm} &= |AB| + |EF| \\ &= |DC| + |EF| \\ &= (|DE| + |EF| + |FC|) + |EF| \\ &= (|DE| + |EF|) + (|EF| + |FC|) \\ &= |DF| + |EC| \\ &= 2 \cdot |BC|\,. \end{aligned}$$

Daher gilt $|BC| = 20\,\text{cm} : 2 = 10\,\text{cm}$.

Lösungsvariante: Wir zeichnen im Bild die Senkrechte zu $\overline{AB}$ durch den Schnittpunkt S der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ ein. Alle entstandenen Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenklig. Die Dreiecke AGS und SGB sind zueinander kongruent, und ebenso die Dreiecke ESH und SFH. Nun lässt sich die Länge der Strecke $\overline{BC}$ wie folgt berechnen:



$$\begin{aligned} |BC| &= |GH| \\ &= |GS| + |SH| \\ &= |AG| + |EH| \\ &= \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|EF| \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |EF|) \\ &= 10\,\text{cm}\,. \end{aligned}$$

Die Zahlen von 1 bis 16 sollen so in eine Reihe geschrieben werden, dass die Summe von zwei benachbarten Zahlen stets eine Quadratzahl ist.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für eine solche Reihe?

Tipp: Überleg dir zuerst für jede Zahl, welche Zahlen neben ihr stehen können, damit die Summe eine Quadratzahl ist.

24. Kanada

Vor einem Volleyballspiel haben alle Spielerinnen unterschiedlich lange trainiert. In der ersten Gruppe sind sieben Mädchen, die 1, 2, 6, 8, 10, 11 und 12 Stunden trainiert haben. In der zweiten Gruppe sind fünf Mädchen, die 3, 4, 5, 7 und 9 Stunden trainiert haben. Um zwei Teams aus jeweils sechs Spielerinnen zu bilden, wechselt Mila aus der ersten Gruppe in die zweite. Der Trainerin fällt auf, dass dadurch die durchschnittliche Trainingszeit in <u>beiden</u> Gruppen zunimmt. Wie lange hat Mila trainiert?

(**A**) 2 Stunden (**B**) 6 Stunden (**C**) 8 Stunden (**D**) 10 Stunden (**E**) 11 Stunden

Lösung: In der ersten Gruppe sind es durchschnittlich $\frac{1+2+6+8+10+11+12}{7} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$ und in der zweiten Gruppe durchschnittlich $\frac{3+4+5+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$ Trainingsstunden. Durch den Wechsel von Mila von der ersten in die zweite Gruppe nimmt die durchschnittliche Trainingszeit in beiden Gruppen zu. Daher muss Milas Trainingszeit kleiner sein als die durchschnittliche Trainingszeit in der ersten Gruppe und grösser als die durchschnittliche Trainingszeit in der zweiten Gruppe. Die einzige Trainingszeit aus der ersten Gruppe, die das erfüllt, ist 6 Stunden.
Übrigens sind die neuen durchschnittlichen Trainingszeiten $\frac{1+2+8+10+11+12}{6} = \frac{44}{6} = 7\frac{1}{3}$ und $\frac{3+4+5+6+7+9}{6} = \frac{34}{6} = 5\frac{2}{3}$ tatsächlich beide grösser als vor dem Wechsel.

25. Philippinen

In die 8 Kästchen sollen die 8 kleinsten Primzahlen so eingetragen werden, dass A eine ganze Zahl ist.
Wie gross kann A maximal sein?

$$A = \frac{\square+\square+\square+\square+\square+\square+\square}{\square}$$

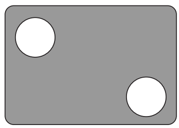
(**A**) 20 (**B**) 14 (**C**) 10 (**D**) 8 (**E**) 6

Lösung: Die 8 kleinsten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 und 19. Damit A eine ganze Zahl ist, muss der Zähler des Bruchs durch den Nenner teilbar sein. Und A ist maximal, wenn der Nenner so klein wie möglich ist.
Eine Methode ist, die Primzahlen der Reihe nach, angefangen mit der kleinsten, als Nenner zu probieren. Die Summe aller 8 Primzahlen beträgt 77. Wir sehen, dass $77 - 2 = 75$ nicht durch 2 teilbar ist, $77 - 3 = 74$ nicht durch 3 teilbar ist und $77 - 5 = 72$ nicht durch 5 teilbar ist. Aber $77 - 7 = 70$ ist durch 7 teilbar. Damit ist $\frac{70}{7} = 10$ der grösstmögliche Wert für A.

Mit einer geschickten Überlegung kommen wir noch schneller zur Lösung: Die Summe einiger Zahlen ist genau dann durch eine Zahl P teilbar, wenn die Summe dieser Zahlen zuzüglich P durch P teilbar ist. Der Zähler des gegebenen Bruchs ist also genau dann durch den Nenner teilbar, wenn der Nenner die Summe aller 8 Primzahlen teilt. Da die Summe der 8 Primzahlen 77 ist, muss der Nenner 7 oder 11 sein. A ist maximal, wenn der Nenner 7 ist. In diesem Fall gilt $A = (77 - 7) : 7 = 10$.

26. Deutschland

Beim Fussballtraining schiesst Oskar 17-mal auf eine Torwand. Er zielt immer auf eines der beiden Löcher. Von den Schüssen auf das Loch links oben sind 60 % Treffer. Von den Schüssen auf das Loch rechts unten sind 75 % Treffer.
Wie viele von Oskars Schüssen auf das Loch rechts unten waren Treffer?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Die Anzahl der Schüsse auf das Loch links oben muss durch 5 teilbar sein, da 60 %, also $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, der Schüsse auf das Loch links oben Treffer sind. Die Anzahl der Schüsse auf das Loch rechts unten muss durch 4 teilbar sein, da 75 %, also $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, der Schüsse auf das Loch rechts unten Treffer sind. Da Oskar insgesamt 17-mal schiesst, sind es auf das Loch links oben 15, 10, 5 oder 0 Schüsse und auf das Loch rechts unten entsprechend $17 - 15 = 2$, $17 - 10 = 7$, $17 - 5 = 12$ bzw. $17 - 0 = 17$ Schüsse. Von diesen Zahlen ist nur 12 durch 4 teilbar, also schiesst Oskar 12-mal auf das Loch rechts unten. Von diesen 12 Schüssen sind $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ Treffer.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 20 zu lösen. —

27. An der Tafel stehen fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Ich wische zwei Zahlen mit der Summe 72 weg. Dann wische ich zwei Zahlen mit der Summe 69 weg. Welche Zahl steht nun noch an der Tafel?

Grossbritannien

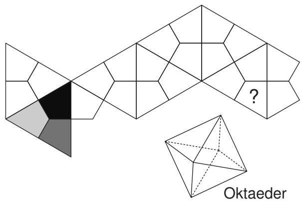
(**A**) 33 (**B**) 34 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 39

Lösung: Bei fünf aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Differenz, die zwei der fünf Zahlen haben können, höchstens 4. Von den fünf Zahlen an der Tafel haben zwei die Summe 72. Diese beiden Zahlen können folglich nur 35 und 37 oder 34 und 38 sein. Zwei andere der fünf Zahlen haben die Summe 69. Diese beiden Zahlen können nur 34 und 35 oder 33 und 36 sein. Wenn es bei der 72 die 34 und die 38 wären, so müssten es bei der 69 die 33 und die 36 sein, weil die 34 nicht zweimal vorkommen kann. Die 33 und die 38 liegen aber zu weit auseinander, deshalb ist dies nicht möglich.
Somit sind es bei der 72 die 35 und die 37 und bei der 69 die 33 und die 36, weil die 35 nicht zweimal vorkommt. An der Tafel standen folglich die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen 33, 34, 35, 36 und 37. Am Ende steht noch die 34 an der Tafel.

Welche ist die grösste natürliche Zahl, bei der jedes Paar benachbarter Ziffern eine zweistellige Quadratzahl ist?

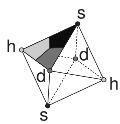
28. Amelie faltet aus dem abgebildeten Netz ein Oktaeder. Die Flächen im Netz färbt sie schwarz, dunkelgrau oder hellgrau. An jeder Ecke des Oktaeders und an jeweils gegenüberliegenden Oktaeder-Ecken sollen alle angrenzenden Flächen dieselbe Farbe haben.
Wie muss Amelie die Fläche mit dem Fragezeichen färben?

Kroatien

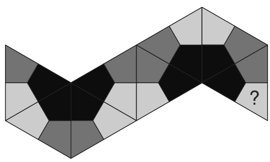


Oktaeder

(**A**) sicher schwarz (**B**) schwarz oder dunkelgrau
(**C**) sicher dunkelgrau (**D**) dunkelgrau oder hellgrau
(**E**) sicher hellgrau



Lösung: Wegen der Symmetrie des Oktaeders können wir annehmen, dass die bereits gefärbte Seitenfläche des Netzes wie im nebenstehenden Bild im Oktaeder liegt. Die drei verschiedenfarbigen Flächen grenzen an drei verschiedene Ecken des Oktaeders. An jeder der Ecken müssen alle anderen angrenzenden Flächen ebenfalls die jeweilige Farbe haben. Auch an den gegenüberliegenden Ecken ist es dieselbe Farbe. Im Bild sind die Ecken des Oktaeders, je nach Farbe der angrenzenden Flächen, mit s für schwarz, d für dunkelgrau oder h für hellgrau beschriftet.
Damit diese Färbung möglich ist, müssen wir bei jeder der Seitenflächen des Oktaeders im Netz eine der drei Flächen schwarz, eine dunkelgrau und eine hellgrau färben.
Ausserdem müssen wir Flächen, die an dieselbe Ecke des Oktaeders angrenzen, gleich färben.
Mit diesen Überlegungen färben wir Schritt für Schritt die anderen Flächen im Netz. Dazu vervollständigen wir die unvollständige Oktaeder-Seitenfläche in der Mitte des Netzes wie im Bild rechts. Die zum Vervollständigen benötigten Flächen waren im ursprünglichen Netz ganz rechts eingezeichnet.



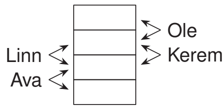
Grenzt eine Fläche an dieselbe Ecke des Oktaeders wie eine bereits gefärbte Fläche, so färben wir diese mit derselben Farbe. Sind dagegen auf einer Seitenfläche bereits zwei der drei Flächen gefärbt, so färben wir die dritte Fläche mit der noch nicht verwendeten Farbe. Auf diese Weise erhalten wir das vollständig gefärbte Netz. Die Fläche mit dem Fragezeichen müssen wir dabei hellgrau färben.

29. Vietnam

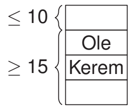
Kerem war mit Ava, Linn und Ole aus seiner Schule in den Ferien bei einem Mathe-Camp. Dort waren alle in einem 4-stöckigen Haus untergebracht. In höheren Stockwerken als Ava haben 25 Kinder gewohnt, in höheren als Linn waren es 10 Kinder. Unterhalb von Ole waren 5 Kinder untergebracht, und unterhalb von Kerem waren es 2 Kinder. Die Anzahl der Kinder, die oberhalb von Kerem untergebracht waren, ist ein Vielfaches der Anzahl der Kinder unterhalb von ihm. Wie viele Kinder waren insgesamt beim Mathecamp?

(**A**) 27 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 37 (**E**) 40

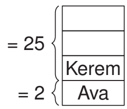
Lösung: Linn muss oberhalb von Ava gewohnt haben, weil es oberhalb von Linn weniger Kinder waren als oberhalb von Ava. Da oberhalb von Linn noch Kinder waren, kann Linn nicht höher als im 3. Stock gewohnt haben und Ava nicht höher als im 2. Stock. Genauso können wir uns überlegen, dass Kerem im 2. oder im 3. Stock gewohnt hat und Ole im 3. oder im 4. Stock.



Eine Möglichkeit ist es nun, wie folgt vorzugehen: Im 4. Stock können höchstens die 10 Kinder oberhalb von Linn gewohnt haben, und darunter haben noch mindestens $25 - 10 = 15$ weitere Kinder gewohnt, da es oberhalb von Ava 25 Kinder waren. Folglich kann Ole nicht im 4. Stock gewohnt haben, weil es unterhalb von Ole nur 5 Kinder waren. Damit muss Ole im 3. Stock gewohnt haben und Kerem im 2. Stock. Nun ist klar, dass im 1. Stock 2 Kinder gewohnt haben und im 2. Stock $5 - 2 = 3$.



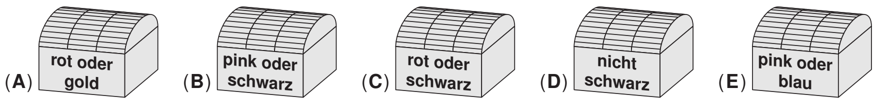
Hätte Ava wie Kerem im 2. Stock gewohnt, so wären es oberhalb von Kerem wie bei Ava 25 Kinder. Die Anzahl der Kinder oberhalb von Kerem wäre dann nicht durch die Anzahl der Kinder unterhalb vom ihm, nämlich 2, teilbar. Deshalb muss Ava im 1. Stock gewohnt haben. Somit waren im 1. Stock 2 Kinder untergebracht und in den Stockwerken darüber insgesamt 25. Die gesuchte Gesamtanzahl ist $25 + 2 = 27$.



Übrigens können wir auch feststellen, wo Linn gewohnt hat und wie viele Kinder in welchem Stockwerk untergebracht waren. Das ist rechts zu sehen. Ausserdem erkennen wir, dass oberhalb von Kerem 22 Kinder gewohnt haben, was wie gefordert durch die Anzahl der Kinder, die unterhalb von ihm untergebracht waren, teilbar ist.

30. Deutschland

Adira hat fünf kleine Truhen mit Perlen zum Basteln, in jeder Truhe eine Farbe: rot, gold, pink, schwarz und blau. Sie hat die Truhen wie gezeigt beschriftet. Alle Aufschriften sind korrekt. Adiras Freundin Ruby möchte wissen, in welcher Truhe die roten Perlen sind. Adira lässt sie in genau eine Truhe hineinschauen. Welche Truhe muss Ruby wählen, damit sie auf jeden Fall weiss, in welcher Truhe die roten Perlen sind?



Lösung: Für den Inhalt von Truhe (**D**) kommen im Unterschied zu den anderen Truhen vier Farben in Frage. In diese Truhe zu schauen, liefert möglicherweise am meisten Information.
Falls (**D**) die roten Perlen enthält, weiss Ruby direkt, wo die roten Perlen sind.
Falls (**D**) die goldenen Perlen enthält, dann weiss Ruby, dass (**A**) die roten Perlen enthält.
Falls die Perlen in (**D**) pink sind, so enthält (**B**) die schwarzen Perlen und (**C**) die roten Perlen.
Und falls (**D**) die blauen Perlen enthält, so sind die Perlen in (**E**) pink, in (**B**) schwarz und in (**C**) rot.
Wenn Ruby also Truhe (**D**) auswählt, weiss sie auf jeden Fall, in welcher Truhe die roten Perlen sind.
Wenn Ruby irgendeine der anderen Truhen wählt, gibt es mindestens eine Farbe der Perlen in der Truhe, bei der noch mehrere Möglichkeiten bleiben, in welcher Truhe sich die roten Perlen befinden können.
Wählt Ruby beispielsweise Truhe (**A**) und diese enthält nicht die roten, sondern die goldenen Perlen, dann können die roten Perlen in Truhe (**C**) oder (**D**) sein, wie die beiden Beispiele zeigen:

(**A**) gold, (**B**) schwarz, (**C**) rot, (**D**) pink, (**E**) blau

(**A**) gold, (**B**) pink, (**C**) schwarz, (**D**) rot, (**E**) blau.

Magische Geburtstags-Quadrate

Magische Quadrate faszinieren Menschen seit jeher. Das älteste bekannte magische Quadrat stammt aus China und ist über 4000 Jahre alt. Ein magisches Quadrat ist ein Zahlenquadrat, in dem die Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen dieselbe „magische“ Summe haben. Bestimmt hast du vorn auf der Broschüre die drei magischen Quadrate zum Ausfüllen entdeckt. Auf der Rückseite steht eine Erklärung dazu. Mit der folgenden Methode kannst du ein magisches 4×4-Quadrat mit deinem Geburtsdatum in der ersten Zeile erzeugen. Sie stammt vom indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887–1920). Ziel ist es, dass möglichst alle eingetragenen Zahlen verschieden sind.
Als Beispiel erzeugen wir ein magisches Geburtstags-Quadrat für das Känguru der Mathematik mit dem Geburtsdatum des Känguru-Wettbewerbs, der am 16.3.1995 in Deutschland zum ersten Mal stattfand.

Schritt 1: Schreib dein Geburtsdatum wie im Beispiel in die erste Zeile: die Tageszahl in das erste Feld, die Monatszahl in das zweite Feld und die Jahreszahl in das dritte und vierte Feld.

Schritt 2: Trag dieselben Zahlen nun jeweils in der Reihenfolge wie im Beispiel in die weiteren Zeilen ein.

Schritt 3: Addiere bzw. subtrahiere in den Feldern wie im Quadrat auf dem Pfeil angegeben. Fertig!

Warum ist dieses Quadrat tatsächlich ein magisches Quadrat?

16	3	19	95
95	19	3	16
3	16	95	19
19	95	16	3

0	0	0	0
+3	–3	–1	+1
–2	+2	+2	–2
–1	+1	–1	+1

→

16	3	19	95
98	16	2	17
1	18	97	17
18	96	15	4

Warum bleibt es nach der Veränderung ein magisches Quadrat?

Hier kannst du dein eigenes magisches Geburtstags-Quadrat erzeugen:

Male zuerst im Beispiel Felder mit gleichen Zahlen mit der gleichen Farbe aus und übertrage das Farbmuster.

0	0	0	0
+3	–3	–1	+1
–2	+2	+2	–2
–1	+1	–1	+1

→

Welche magische Summe hat dein magisches Geburtstags-Quadrat?

Dein magisches Geburtstags-Quadrat hat noch weitere magische Eigenschaften: Auch die 4 Zahlen in den Ecken, die 4 Zahlen in den 2×2-Teilquadraten in den Ecken und in der Mitte sowie die 4 Zahlen in den Ecken jedes 3×3-Teilquadrats haben die gleiche magische Summe. Warum ist das so?

Wenn wie im Beispiel nicht alle Einträge verschieden sind, verändern wir die Zahlen noch wie folgt:

16	3	19	95
98	16	2	17
1	18	97	17
18	96	15	4

0	0	0	0
+3	–3	+3	–3
0	0	0	0
–3	+3	–3	+3

→

16	3	19	95
101	13	5	14
1	18	97	17
15	99	12	7

Warum bleibt es auch nach dieser Veränderung ein magisches Quadrat?

Schaffst du es, dass dein magisches Geburtstags-Quadrat 16 verschiedene Zahlen enthält?

Statt der Zahl 3 kannst du auch jede andere Zahl wählen. Probier es aus.

0	0	0	0
+	–	+	–
0	0	0	0
–	+	–	+

→

Leider klappt das nicht mit allen Geburtsdaten, zum Beispiel ist der 14.4.2014 ungünstig.

Wie sehen die magischen Geburtstags-Quadrate deiner Eltern, Geschwister und Freunde aus?

Kreuze und Kreise: BINOXXO

In den folgenden Diagrammen soll in jedes Feld ein Kreuz X oder ein Kreis O eingetragen werden. In jeder senkrechten und in jeder waagerechten Reihe soll es genauso viele Kreuze wie Kreise geben. Ausserdem dürfen in <u>keiner</u> senkrechten oder waagerechten Reihe mehr als zwei Kreuze oder mehr als zwei Kreise direkt aufeinander folgen.

Wer trägt die Kreuze und Kreise richtig ein?

			O		
O		X	O		
				X	
O	O			X	
	X				X
		X			

				X	
X					X
			O	O	
	X	X			
O					X
	O		O		

	O				
O			X	X	
	X		X		
					O
	O	O			X
				X	

O					X
		X	O		
	O				
X				O	
		O			
O					O

	X				
		X			X
	O				
	O		O		
				X	
	X			X	O
					O
O					

		X	X		
X					
		O			O
X					
X			X		O
	O				
O					
		X		X	

				X	
X		O		O	
		O			X
			X		
					O
				O	
	O	O			
X			X		

O					O
			O		
O	O			X	
		O	O		
O				O	
	X				X

	O								
X		X					X		X
			O	X		O			
O		O		X				O	
					X		X		X
		X			X				

					O				
		O			O				X
			X			O	X		
X						O			
	O	O		X			X		
	O					X			

	O		O				
X				X			X
				X			
	X	X					
			O			X	
	X					X	
		X					O
			O				

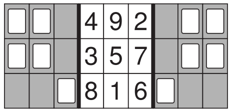
X			O	X			O
	X	X			O	X	
X							X
O							X
	O	O			O	X	
			X	X			
O							O
	X					X	

			O		O		
O			X				
	O				O		X
							X
		O	O				
				X			
X	X						
	X				O		X

Klassenstufen 9 und 10

1. Eine Klappkarte mit Löchern wird an den dicken Linien gefaltet. Nach dem Falten sieht man durch die Löcher noch einige der Zahlen. Wie gross ist die Summe dieser Zahlen?

Tunesien



(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 15

Lösung: Nach dem Falten der linken Klappe sind durch die Löcher noch die Zahlen 9, 2, 5, 7 und 8 zu sehen. Von diesen bleiben nur die 9 und die 5 in der mittleren Spalte auch nach dem Falten der rechten Klappe sichtbar. Die gesuchte Summe ist also 9 + 5 = 14.

— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 7/8 die Aufgabe 4. —

2. Das alljährliche Schachturnier an meiner Schule findet immer am 3. Freitag im Mai statt. Welches ist das frühestmögliche Datum für das Schachturnier?

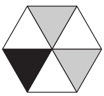
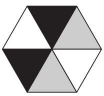
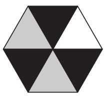
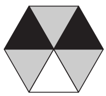
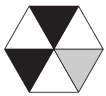
Afghanistan

(**A**) 14. Mai (**B**) 15. Mai (**C**) 16. Mai (**D**) 17. Mai (**E**) 18. Mai

Lösung: Das Datum des 3. Freitags im Mai ist genau dann das frühestmögliche, wenn auch das Datum des 1. Freitags im Mai das frühestmögliche ist. Diese beiden Freitage liegen stets genau 2 Wochen, also 14 Tage, auseinander. Das frühestmögliche Datum für den 1. Freitag im Mai ist natürlich der 1. Mai. Also ist wegen 1 + 14 = 15 das frühestmögliche Datum für das Schachturnier der 15. Mai.

3. In welchem der Sechsecke ist genau ein Drittel der Fläche schwarz und genau die Hälfte der Fläche weiss?

Deutschland

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Jedes der Sechsecke ist in 6 gleich grosse Dreiecke zerlegt. Im gesuchten Sechseck ist genau ein Drittel der Fläche schwarz, das sind wegen 6 : 3 = 2 genau 2 dieser Dreiecke. Und es ist genau die Hälfte der Fläche weiss, das sind wegen 6 : 2 = 3 genau 3 dieser Dreiecke. Das einzige Sechseck mit 2 schwarzen und 3 weissen Dreiecken ist das Sechseck bei (**E**).

4. Auf einer Packung Reis ist angegeben, dass 1 Tasse Reis mit $1\frac{1}{2}$ Tassen Wasser gekocht werden soll. Niklas will $1\frac{1}{2}$ Tassen Reis kochen. Wie viele Tassen Wasser braucht er dafür?

Deutschland

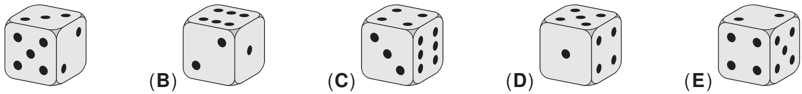
(**A**) $1\frac{1}{4}$ (**B**) $1\frac{3}{4}$ (**C**) $2\frac{1}{4}$ (**D**) $2\frac{1}{2}$ (**E**) $2\frac{3}{4}$

Lösung: Niklas benutzt $1\frac{1}{2}$ Tassen Reis statt 1 Tasse Reis, also die Hälfte mehr. Folglich braucht Niklas auch die Hälfte von $1\frac{1}{2}$ Tassen Wasser mehr. Die Hälfte von $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ Tassen Wasser sind $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ Tassen Wasser. Das macht dann insgesamt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ Tassen Wasser.

Die Aufgabe können wir auch so lösen: Für die anderthalbfache Menge an Reis braucht Niklas die anderthalbfache Menge an Wasser, also $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ Tassen Wasser.

5. Bei einem normalen Spielwürfel ergeben die Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen zusammen immer 7. Nur einer der gezeigten Würfel kann ein normaler Spielwürfel sein. Welcher?

Frankreich



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Da bei einem normalen Spielwürfel die Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seitenflächen zusammen immer 7 ergeben, liegen 1 und 6, 2 und 5 sowie 3 und 4 einander gegenüber. (**A**) zeigt keinen normalen Spielwürfel, da 2 und 5 benachbart sind. Bei (**B**) sind 1 und 6 benachbart, bei (**C**) 3 und 4 und bei (**E**) 2 und 5. Auch das sind keine normalen Spielwürfel. Nur bei (**D**) können die Augenzahlen 1 und 6, 2 und 5 sowie 3 und 4 wie gefordert einander gegenüberliegen, das ist der gesuchte Würfel.

6. Die Jahreszahl 2025 ist eine Quadratzahl, denn $2025 = 45^2$.
In wie vielen Jahren ist die Jahreszahl das nächste Mal eine Quadratzahl?

Iran

(**A**) 35 (**B**) 91 (**C**) 123 (**D**) 171 (**E**) 236

Lösung: Das nächste Quadratzahljahr ist natürlich 46^2. Mithilfe der 3. binomischen Formel können wir schnell berechnen, wie viele Jahre bis dahin vergehen. Es sind $46^2 - 45^2 = (46+45)\cdot(46-45) = 91\cdot 1 = 91$.

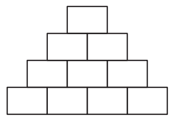
7. Im Supermarkt wurde der Preis der Bananen vergangene Woche um 50 % erhöht und diese Woche um ein Drittel verringert. Wie gross ist der Preis der Bananen nun im Vergleich zum Beginn?

Spanien

(**A**) halb so gross (**B**) um ein Fünftel kleiner (**C**) genauso gross
(**D**) um ein Viertel grösser (**E**) doppelt so gross

Lösung: Eine Erhöhung des Preises um 50 % entspricht einer Multiplikation mit $\frac{150}{100} = \frac{3}{2}$, und eine Verringerung um ein Drittel entspricht einer Multiplikation mit $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Somit wird insgesamt mit $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ multipliziert. Die Bananen kosten also genauso viel wie zu Beginn.

Mia möchte die abgebildete Pyramide ausmalen:
4 Felder rot, 3 Felder blau, 2 Felder gelb und 1 Feld orange.
Felder, die sich berühren, sollen verschiedene Farben haben.
Wie viele Möglichkeiten hat Mia, die Pyramide so auszumalen?



8. An meinem Kühlschrank haften vier Magnete mit Ziffern darauf 2 0 2 5.
Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen lassen sich damit bilden?

Österreich

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 9 (**E**) 11

Lösung: Jede vierstellige Zahl mit den Ziffern 2, 0, 2, 5 beginnt entweder mit 2 oder mit 5, denn die 0 ist an der Tausenderstelle nicht möglich. Die mit 2 beginnenden Zahlen haben die Ziffern 0, 2, 5 an den drei anderen Stellen. Diese drei Ziffern sind alle verschieden und somit gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ mögliche Reihenfolgen. Die mit 5 beginnenden Zahlen haben die Ziffern 0, 2, 2 an den drei anderen Stellen. Hier finden wir nur 3 mögliche Reihenfolgen, je nachdem, an welcher der drei Stellen die 0 steht. Insgesamt gibt es $6 + 3 = 9$ vierstellige Zahlen mit den Ziffern 2, 0, 2, 5.
Die Lösung lässt sich auch gut durch systematisches Aufschreiben finden. Es lassen sich die 9 Zahlen 2025, 2052, 2205, 2250, 2502, 2520, 5022, 5202, 5220 bilden.

— *In Klassenstufe 7/8 wurde in Aufgabe 1 nur nach der grössten dieser Zahlen gefragt.* —

9. Die fünf Freunde Elisa, Gabriel, Julika, Levi und Yasin haben alle das gleiche Smartphone. Am Morgen waren die fünf Smartphones alle voll geladen. Unten sind die fünf Akkuanzeigen am Abend zu sehen. Gabriel hat genauso viel verbraucht wie Elisa und Julika zusammen. Gabriels Akku ist leer. Levi hat sein Smartphone gar nicht benutzt. Welche Akkuanzeige gehört zu Yasins Smartphone?

Slowenien

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Der weisse Bereich der Akkuanzeigen zeigt an, was bereits verbraucht ist. Zu Gabriels Smartphone gehört die Akkuanzeige bei (**D**), da sein Akku leer ist. Da Gabriel genauso viel verbraucht hat wie Elisa und Julika zusammen, gehören den beiden Mädchen die Smartphones mit den Akkuanzeigen bei (**C**) und bei (**E**), denn nur bei diesen beiden sind die weissen Anteile zusammen genauso gross wie bei (**D**). Levi hat sein Smartphone gar nicht benutzt, dazu passt nur die Akkuanzeige bei (**B**). Es bleibt die Akkuanzeige bei (**A**), die gehört folglich zu Yasins Smartphone.

10. Die Zahl x ist grösser als 5. Welcher der folgenden Ausdrücke hat den kleinsten Wert?

Argentinien

(**A**) $\frac{5}{x+1}$ (**B**) $\frac{5}{x}$ (**C**) $\frac{5}{x-1}$ (**D**) $\frac{x}{5}$ (**E**) $\frac{x+1}{5}$

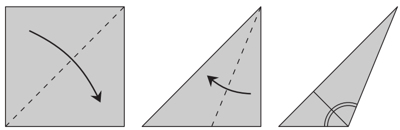
Lösung: Von Brüchen mit gleichem Zähler ist derjenige der kleinste, der den grössten Nenner hat. Folglich hat von (**A**), (**B**) und (**C**) der Ausdruck bei (**A**) den kleinsten Wert. Da x grösser als 5 ist, ist der Wert von (**A**) kleiner als 1. Die Werte von (**D**) und (**E**) sind beide grösser als 1. Folglich ist (**A**) der gesuchte Ausdruck mit dem kleinsten Wert.

— Eine ähnliche Frage mit konkreten Zahlen war in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 1 gestellt. —

11. Alex faltet ein quadratisches Blatt Papier wie abgebildet an den gestrichelten Linien. Wie gross ist der stumpfe Winkel in dem entstandenen Dreieck?

Australien

(**A**) 105° (**B**) 112,5° (**C**) 115° (**D**) 120° (**E**) 127,5°



Lösung: Wird entlang einer Linie durch eine Ecke so gefaltet, dass die beiden angrenzenden Seiten aufeinander zu liegen kommen, dann wird dabei der Winkel in dieser Ecke halbiert. Das Ausgangsquadrat hat vier 90°-Winkel. Das Dreieck nach dem ersten Falten hat einen 90°-Winkel und wegen $90 : 2 = 45$ zwei 45°-Winkel. Das Dreieck nach dem zweiten Falten hat einen 45°-Winkel und wegen $45 : 2 = 22{,}5$ einen 22,5°-Winkel. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt, können wir nun die gesuchte Grösse des stumpfen Winkels berechnen: $180° - 45° - 22{,}5° = 112{,}5°$.

12. Seit ihr Nachbar Fritz nicht mehr gut laufen kann, erledigt Ellen viele Einkäufe für ihn. Heute hat sie Sesambrötchen, Mohnbrötchen und Kümmelbrötchen eingekauft. Fritz zählt, etwas umständlich, was sie mitgebracht hat: „8 Brötchen sind ohne Sesam, und 5 sind ohne Mohn." „Und 7 sind ohne Kümmel", ergänzt Ellen. Wie viele Brötchen hat Ellen gekauft?

Serbien

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Jedes Sesambrötchen wurde bei den Brötchen „ohne Mohn" und bei den Brötchen „ohne Kümmel" gezählt. Jedes Mohnbrötchen wurde bei den Brötchen „ohne Sesam" und bei den Brötchen „ohne Kümmel" gezählt, und jedes Kümmelbrötchen wurde bei den Brötchen „ohne Sesam" und bei den Brötchen „ohne Mohn" gezählt. Das heisst, jedes Brötchen wurde zweimal gezählt. Damit ist $8+5+7 = 20$ genau das Doppelte der Anzahl aller Brötchen. Ellen hat also $20 : 2 = 10$ Brötchen gekauft.
Die Aufgabe lässt sich auch übersichtlich mit Variablen lösen. Wir bezeichnen mit s, m und k die Anzahl der Sesam-, Mohn- und Kümmelbrötchen. Dann gelten $m+k = 8$, $s+k = 5$ und $s+m = 7$. Dieses Gleichungssystem lässt sich auf verschiedene Arten lösen. Es genügt aber, die drei Gleichungen zu addieren, weil uns ja nur die Gesamtzahl interessiert. So erhalten wir $2\cdot(s+m+k) = 20$ und daraus $s+m+k = 20 : 2 = 10$.

13. Taiwan

In einem Beutel befinden sich 11 Kugeln, die mit den Zahlen von 3 bis 13 beschriftet sind. Ohne hinzusehen soll eine Kugel nach der anderen gezogen werden. Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, damit garantiert drei Kugeln mit Primzahlen dabei sind?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Von den 11 Kugeln sind die 5 Kugeln mit den Zahlen 3, 5, 7, 11 und 13 mit einer Primzahl beschriftet und die anderen 6 Kugeln nicht. Werden 8 Kugeln gezogen, könnten nur 2 Kugeln mit Primzahlen und alle 6 Kugeln, die nicht mit einer Primzahl beschriftet sind, dabei sein. Spätestens mit der 9. Kugel ziehen wir aber garantiert die dritte Primzahl. Die gesuchte Anzahl ist also 9.

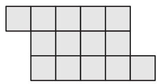
14. Georgien

Kati und Tom haben sich beide eine natürliche Zahl gedacht. Die Summe der beiden Zahlen liegt zwischen 40 und 100. Ausserdem ist Katis Zahl geteilt durch 19 gleich Toms Zahl geteilt durch 17.
Welche Zahl hat Kati sich gedacht?

(**A**) 19 (**B**) 32 (**C**) 38 (**D**) 57 (**E**) 76

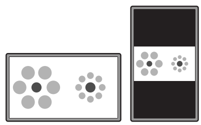
Lösung: Katis Zahl ist durch 19 teilbar, das heisst eine der Zahlen 19, 38 ($= 2 \cdot 19$), 57 ($= 3 \cdot 19$), 76 ($= 4 \cdot 19$) ... Katis Zahl ist also von der Form $19k$ mit einer natürlichen Zahl k. Dann ist Toms Zahl die Zahl $17k$, da Katis Zahl geteilt durch 19 gleich Toms Zahl geteilt durch 17 ist, und das ist genau k. Die Summe aus Katis und Toms Zahl ist folglich $19k + 17k = 36k$. Da von den Vielfachen von 36 nur 72 ($= 2 \cdot 36$) zwischen 40 und 100 liegt, ist $k = 2$. Kati hat sich folglich die Zahl ($2 \cdot 19 =$) 38 gedacht.

Auf wie viele Weisen lässt sich die Figur rechts entlang der Linien in zwei zueinander kongruente Teile zerlegen?



15. Deutschland

Romy sieht sich ein Foto auf ihrem Smartphone an. Es ist im Querformat 16 : 9 und füllt das Display genau aus. Wenn sie das Smartphone dreht, wird das Foto kleiner angezeigt, siehe Bild. Welchen Anteil des Displays füllt das Foto nun aus?



(**A**) $\frac{3}{4}$ (**B**) $\frac{4}{9}$ (**C**) $\frac{27}{64}$ (**D**) $\frac{32}{81}$ (**E**) $\frac{81}{256}$

Lösung: Die lange Seite des Fotos ist im linken Bild so lang wie die lange Seite des Displays und im rechten Bild so lang wie die kurze Seite des Displays. Das Display ist im Format 16 : 9. Also ist im rechten Bild die Länge der langen Seite des Fotos $\frac{9}{16}$ der Länge der langen Seite des Fotos im linken Bild. Das heisst, dass der Skalierungsfaktor vom linken zum rechten Bild $\frac{9}{16}$ ist. Der Flächeninhalt wird somit mit dem Faktor $\left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256}$ skaliert. Und das ist genau der gesuchte Anteil, denn das Display ist ja genauso gross wie das Foto im linken Bild.

16. Indonesien

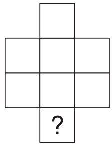
Die natürliche Zahl N ist die grösste 6-stellige Zahl, deren Ziffern das Produkt 180 haben.
Wie gross ist die Quersumme von N?

(**A**) 21 (**B**) 20 (**C**) 19 (**D**) 17 (**E**) 16

Lösung: Die Ziffer an der ersten Stelle muss die grösstmögliche Ziffer sein, die 180 teilt, und das ist 9. Das Produkt der restlichen Ziffern ist $180 : 9 = 20$. Die nächste Ziffer muss die grösstmögliche Ziffer sein, die 20 teilt, und das ist 5. Dann folgt die grösstmögliche Ziffer, die $20 : 5 = 4$ teilt, und das ist 4. Die restlichen Ziffern sind 1. Die grösste 6-stellige Zahl, deren Ziffern das Produkt 180 haben, ist also 954111, und diese hat die Quersumme $9 + 5 + 4 + 1 + 1 + 1 = 21$.

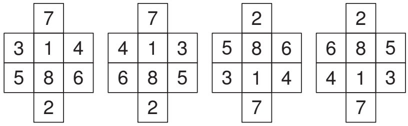
17. Spanien

Vasily will die Zahlen von 1 bis 8 rechts in die Kästchen eintragen. Aufeinanderfolgende Zahlen sollen niemals in Kästchen stehen, die eine gemeinsame Seite oder Ecke haben. Welche Zahlen kann Vasily in das Kästchen mit dem Fragezeichen schreiben?



(**A**) 1 oder 8 (**B**) 2 oder 7 (**C**) 3 oder 6 (**D**) 4 oder 5 (**E**) 7 oder 8

Lösung: Das Kästchen, das zwei Kästchen oberhalb des Fragezeichens liegt, hat mit 6 der anderen Kästchen eine gemeinsame Seite oder Ecke. Das sind alle anderen Kästchen, ausgenommen das mit dem Fragezeichen. Für Vorgänger und Nachfolger dieser Zahl kommt also nur das Kästchen mit dem Fragezeichen infrage. Das heisst, dass die Zahl im Kästchen, das zwei Kästchen oberhalb des Fragezeichens liegt, unter den Zahlen von 1 bis 8 entweder keinen Vorgänger oder keinen Nachfolger hat, da dafür ja nur ein Kästchen zur Verfügung steht. Folglich ist dort entweder 1 oder 8 einzutragen und in das Feld mit dem Fragezeichen entweder 2 oder 7.
Rechts sind alle möglichen Eintragungen abgebildet.



18. Australien

Die 4-stellige Zahl 80[redacted] ist durch 8 und durch 9 teilbar. Die letzten beiden Ziffern sind verdeckt. Wie gross ist das Produkt dieser beiden Ziffern?

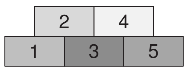
(**A**) 6 (**B**) 16 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 48

Lösung: Die erste denkbare Zahl 8000 ist durch 8 teilbar. Die 4-stellige Zahl in der Aufgabe ist somit eine der Zahlen 8000, 8008, 8016, 8024, 8032, 8040, 8048, 8056, 8064, 8072, 8080, 8088, 8096. Die Zahl 8100, die um 1 grösser ist als die letzte denkbare Zahl, ist durch 9 teilbar. Die 4-stellige Zahl in der Aufgabe ist somit auch eine der Zahlen 8091, 8082, 8073, 8064, 8055, 8046, 8037, 8028, 8019, 8010, 8001. Nur die 8064 kommt in beiden Listen vor. Das gesuchte Produkt ist somit gleich $6 \cdot 4 = 24$.
Wer die Teilbarkeitsregel der 9 im Kopf hat, erkennt, dass die beiden verdeckten Ziffern nur die Summe 1 oder 10 haben können. Der erste Fall liefert mit 8001 oder 8010 keine durch 8 teilbare Zahl. Also ist die Summe der verdeckten Ziffern 10. Die 4-stellige Zahl ist ausserdem gerade, da sie durch 8 teilbar ist, also kommen nur 8082, 8064, 8046 und 8028 infrage. Von diesen ist nur 8064 durch 8 teilbar, was man mithilfe der obigen Idee, mithilfe der Teilbarkeitsregel für 8 oder durch Nachrechnen erkennen kann.

— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 11–13 die Aufgabe 16. —

19. China

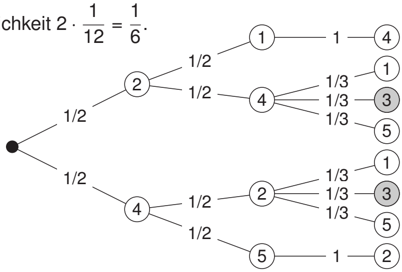
Fünf Pakete liegen wie im Bild auf dem Tisch gestapelt. Mara soll sie wegräumen. Sie kann ein Paket nur dann wegräumen, wenn kein anderes darauf liegt. Mara wählt zufällig ein freies Paket aus und räumt es weg. Als nächstes wählt sie zufällig wieder ein freies Paket aus und räumt es weg usw.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mara das Paket 3 als drittes wegräumt?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{1}{8}$

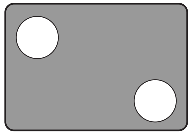
Lösung: Um das Paket 3 als drittes wegräumen zu können, muss Mara zuerst 2 und 4 wegräumen. Damit ergeben sich nur zwei mögliche Reihenfolgen: 2, 4, 3 oder 4, 2, 3. Für beide beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$. Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Wir können auch ein Baumdiagramm erstellen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mara das Paket 3 als drittes wegräumt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Wege, die bei einer 3 enden, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.



20. Deutschland

Paul schiesst 27-mal auf eine Torwand. Er zielt immer auf eines der beiden Löcher. Von den Schüssen auf das Loch links oben sind 50 % Treffer. Von den Schüssen auf das Loch rechts unten sind 80 % Treffer. Insgesamt hat er 9-mal danebengeschossen. Wie viele von Pauls Schüssen auf das Loch links oben waren Treffer?



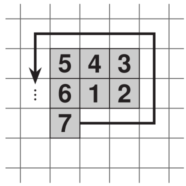
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Es sei L die Anzahl der Schüsse auf das Loch links oben. Dann ist $(27 - L)$ die Anzahl der Schüsse auf das Loch rechts unten. Da Paul 9-mal danebengeschossen hat, hat er wegen $27 - 9 = 18$ insgesamt 18-mal getroffen. Es gilt also $18 = L \cdot \frac{50}{100} + (27 - L) \cdot \frac{80}{100}$. Diese Gleichung formen wir um: $18 = \frac{27 \cdot 80}{100} - \frac{30}{100}L = \frac{27 \cdot 8}{10} - \frac{3}{10}L$. Daraus folgt $180 = 27 \cdot 8 - 3L$ und somit $L = \frac{27 \cdot 8 - 180}{3} = 9 \cdot 8 - 60 = 12$. Von diesen 12 Schüssen waren 50 % Treffer, also 6 Schüsse.

— *Eine ähnliche Aufgabe war Aufgabe 26 in Klassenstufe 7/8. Die Anzahl der Fehlschüsse war dort nicht gegeben, das Problem aber trotzdem eindeutig lösbar. Der vorgestellte alternative Lösungsansatz kann auch hier verwendet werden.* —

21. Österreich

Lucie schreibt auf kariertem Papier. Die quadratischen Kästchen haben die Seitenlänge 0,5 cm. Sie beginnt mit einem Kästchen und trägt dort die Zahl 1 ein. Dann nummeriert sie die Kästchen spiralförmig weiter wie gezeigt. Nachdem sie das 2025. Kästchen nummeriert hat, malt Lucie alle nummerierten Kästchen grau aus. Wie gross ist der Umfang der grauen Figur?



(**A**) 75 cm (**B**) 78 cm (**C**) 85 cm (**D**) 90 cm (**E**) 96 cm

Lösung: Immer, wenn Lucie eine Quadratzahl schreibt, bilden die Kästchen, die dann schon eine Zahl enthalten, ein Quadrat. Aus Aufgabe 6 wissen wir, dass $2025 = 45^2$ gilt. Das bedeutet, dass die Kästchen mit den Zahlen von 1 bis 2025 ein Quadrat mit der Seitenlänge von 45 Kästchenseiten bilden. Da jedes Kästchen die Seitenlänge 0,5 cm hat, hat das graue Quadrat am Ende den Umfang $4 \cdot 45 \cdot 0{,}5\,\text{cm} = 90\,\text{cm}$.

22. Griechenland

An meiner Schule hat das Mädchen-Team im 3×3-Basketball Verstärkung bekommen. Zu den 5 Stammspielerinnen sind 2 neue Spielerinnen hinzugekommen. Bei einem Trainingsspiel gegen ein befreundetes Schulteam trugen sie die Rückennummern 3, 14, 15, 9, 26, 5, 35. Nacheinander wurde immer eine Spielerin gewechselt. Zu jedem Zeitpunkt waren 2 Stammspielerinnen und eine neue Spielerin auf dem Feld. Die Rückennummern der Spielerinnen, die jeweils auf dem Feld standen, waren der Reihe nach

3, 14, 15 → 14, 15, 9 → 15, 9, 26 → 9, 26, 5 → 26, 5, 35 → 5, 35, 3.

Welche Summe haben die Rückennummern der beiden neuen Spielerinnen?

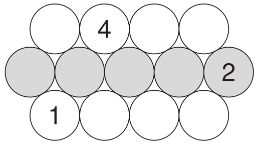
(**A**) 12 (**B**) 20 (**C**) 29 (**D**) 40 (**E**) 44

Lösung: Die zwei Spielerinnen, die bei einem Wechsel gegeneinander ausgewechselt werden, sind entweder beide Stammspielerinnen oder beide neue Spielerinnen. Das gilt also für 3 und 9; 14 und 26; 15 und 5; 9 und 35; 26 und 3. Wären 3 und 9 die neuen Spielerinnen, so wären auch 26 und 35 neue Spielerinnen. Da es aber nur 2 neue Spielerinnen gibt, sind 3, 9, 26 und 35 Stammspielerinnen. Damit ist 14 auch eine Stammspielerin, und die beiden neuen Spielerinnen haben die Rückennummern 15 und 5. Daraus ergibt sich die gesuchte Summe $15 + 5 = 20$.

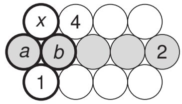
Lösungsvariante: Bei den Aufstellungen 3, 14, 15 und 9, 26, 5 ist jeweils eine neue Spielerin dabei. Da diese sechs Nummern alle verschieden sind, müssen die beiden neuen Spielerinnen dabei sein. Also ist die Spielerin mit der Nummer 35 eine der Stammspielerinnen. Betrachten wir die Aufstellungen 14, 15, 9 und 26, 5, 35, so folgt aus demselben Grund wie zuvor, dass die Spielerin mit der Nummer 3 eine der Stammspielerinnen ist. Daraus folgt, dass in der Aufstellung 5, 35, 3 die Spielerin mit der Nummer 5 eine neue Spielerin ist. Da sie beim 3. Wechsel mit der Nummer 15 wechselt, ist Nummer 15 die andere neue Spielerin. Die gesuchte Summe ist gleich 20.

23. Malaysia

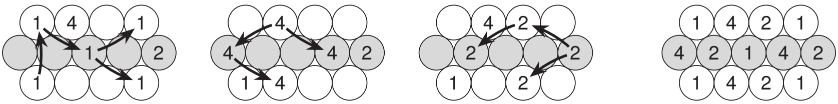
In jeden Kreis im Bild soll eine Zahl so geschrieben werden, dass die Summe der Zahlen in drei Kreisen, die einander paarweise berühren, immer gleich ist. Drei Zahlen sind bereits eingetragen.
Wie gross ist dann die Summe der fünf Zahlen in der mittleren Reihe?



(**A**) 3 (**B**) 8 (**C**) 13 (**D**) 18 (**E**) 23

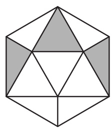


Lösung: Wir bezeichnen die beiden Zahlen, die in die beiden linken grauen Kreise einzutragen sind, mit a und b, und die Zahl darüber mit x. Die beiden grauen Kreise berühren beide sowohl den linken Kreis in der oberen Zeile als auch den linken Kreis in der unteren Zeile. Da die Summen $(x + a + b)$ und $(a + b + 1)$ gleich sein sollen, folgt daraus $x = 1$. Dieselbe Überlegung können wir auf jede solche Vierergruppe von Kreisen übertragen und die Figur vollständig mit den Zahlen 1, 2 und 4 ausfüllen.



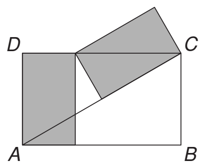
Die Summe der Zahlen in drei Kreisen, die einander paarweise berühren, ist dann immer 7. Und die Summe der Zahlen in den fünf grauen Kreisen ist gleich $4 + 2 + 1 + 4 + 2 = 13$.

Ein regelmässiges Sechseck ist wie rechts abgebildet in 4 gleichseitige und 6 rechtwinklige Dreiecke zerlegt.
Wie gross ist der Anteil der grauen Fläche am gesamten Flächeninhalt des Sechsecks?

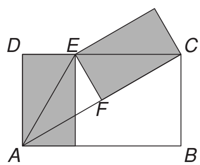


24. China

Die beiden grauen Rechtecke im Bild sind zueinander kongruent. Sie haben beide den Flächeninhalt $3\,\text{cm}^2$.
Wie gross ist der Flächeninhalt des grossen Rechtecks *ABCD*?



(**A**) $8\,\text{cm}^2$ (**B**) $9\,\text{cm}^2$ (**C**) $10\,\text{cm}^2$ (**D**) $11\,\text{cm}^2$ (**E**) $12\,\text{cm}^2$



Lösung: Wir zeichnen als Hilfslinie die Strecke $\overline{AE}$ ein. Es sind $\overline{AE}$ und $\overline{EC}$ jeweils Diagonalen in einem der beiden grauen Rechtecke. Also gilt $|AE| = |EC|$, da die grauen Rechtecke zueinander kongruent sind. Die Winkel *CFE* und *EFA* sind beide 90° gross. Da die beiden Dreiecke *AFE* und *FCE* auch noch die gemeinsame Seite $\overline{EF}$ haben, sind sie zueinander kongruent (SsW).
Da jedes Rechteck durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, sind die drei Dreiecke *AED*, *AFE* und *FCE* jeweils so gross wie ein halbes graues Rechteck. Diese drei Dreiecke füllen genau die Hälfte des Rechtecks *ABCD* oberhalb der Diagonalen $\overline{AC}$ aus. Also ist der Flächeninhalt des Rechtecks *ABCD* das Dreifache des Flächeninhalts eines grauen Rechtecks, das heisst $3 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2$.
Die Aufgabe kann auch ohne Hilfslinie gelöst werden, denn wir können zeigen, dass das kleine graue und das kleine weisse Dreieck in der gegebenen Zeichnung zueinander kongruent sind (sww). Daraus ergibt sich, dass das Dreieck *ACD* den Flächeninhalt von anderthalb grauen Rechtecken hat, das Rechteck *ABCD* also den Flächeninhalt von drei grauen Rechtecken, das heisst $3 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 9\,\text{cm}^2$.

25. China

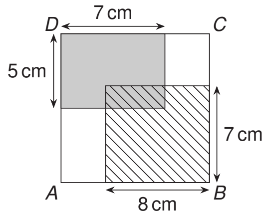
Die sechsstellige Zahl $\overline{ABCDEF}$ wird aus den sechs Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 gebildet. Jede Ziffer kommt genau einmal vor. Die Zahl $\overline{AB}$ aus den ersten zwei Ziffern ist ein Vielfaches von 2. Die Zahl $\overline{ABC}$ aus den ersten drei Ziffern ist ein Vielfaches von 3. Die Zahl $\overline{ABCD}$ ist ein Vielfaches von 4, die Zahl $\overline{ABCDE}$ ist ein Vielfaches von 5, und die sechsstellige Zahl $\overline{ABCDEF}$ selbst ist ein Vielfaches von 6.
Welche ist ihre letzte Ziffer F?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 2 und 4 sind möglich
(**D**) 4 und 6 sind möglich (**E**) 2, 4 und 6 sind möglich

Lösung: Die Lösung lässt sich gut mithilfe der Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 4, 5 und 6 finden. Die Zahlen $\overline{AB}$, $\overline{ABCD}$ und $\overline{ABCDEF}$ sind alle gerade. Also stehen B, D und F für die geraden Ziffern 2, 4 und 6 und A, C und E folglich für die ungeraden Ziffern 1, 3 und 5. Da die Quersumme von $\overline{ABCDEF}$ in jedem Fall 21 und somit durch 3 teilbar ist, ist $\overline{ABCDEF}$ für jede gerade Ziffer F durch 6 teilbar. Da $\overline{ABCDE}$ durch 5 teilbar ist, muss $E = 5$ gelten. Damit bleiben für A und C die Ziffern 1 und 3. Da $\overline{ABC}$ durch 3 teilbar ist, ist ihre Quersumme $A+B+C = B+4$ durch 3 teilbar. Von den möglichen Ziffern 2, 4 und 6 für B kommt daher nur 2 infrage. Also gilt $B = 2$. Die Zahl $\overline{ABCDEF}$ ist also entweder gleich $\overline{123D5F}$ oder gleich $\overline{321D5F}$. Da $\overline{ABCD}$ durch 4 teilbar ist, ist auch die Zahl $\overline{CD}$ aus ihre beiden letzten Ziffern durch 4 teilbar. Da von den möglichen Kombinationen 14, 16, 34, 36 nur 16 und 36 durch 4 teilbar sind, gilt $D = 6$. Damit folgt $F = 4$. Die Zahl $\overline{ABCDEF}$ kann entweder 123654 oder 321654 sein.

Wie viele Vielfache von 2025 sind von der Form $\overline{20AB25}$, wobei A und B beliebige Ziffern sind?

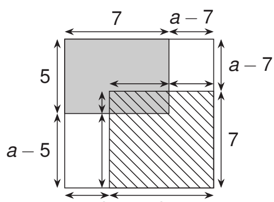
26. Bulgarien



Das Quadrat $ABCD$ enthält ein graues und ein gestreiftes Rechteck wie abgebildet. Der Flächeninhalt des überlappenden Teils der beiden Rechtecke beträgt $18\,\text{cm}^2$ (*Abbildung nicht massstabsgerecht*).
Wie gross ist der Umfang des Quadrats $ABCD$?

(**A**) 28 cm (**B**) 34 cm (**C**) 36 cm (**D**) 38 cm (**E**) 40 cm

Lösung: Wir bezeichnen mit a die Seitenlänge des Quadrats $ABCD$ in cm. Wir rechnen in cm bzw. cm^2. Das überlappende rechteckige Teil hat die Seitenlängen $8-(a-7) = 15-a$ und $7-(a-5) = 12-a$. Folglich gilt $18 = (15-a)\cdot(12-a)$, woraus wir die quadratische Gleichung $a^2 - 27\cdot a + 162 = 0$ erhalten.



Aus der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen folgt $a = \frac{27}{2} \pm \sqrt{\frac{27^2}{2^2} - 162} = \frac{27 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{27 \pm 9}{2}$. Also gilt $a = 18$ oder $a = 9$.
Wäre $a = 18$, so würden sich das graue Rechteck und das gestreifte Rechteck nicht überlappen. Somit gilt $a = 9$, und der gesuchte Umfang ist gleich $4\cdot 9\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$.
Wir erhalten die Lösung auch, wenn wir zu Beginn statt der Seitenlänge des Quadrats $ABCD$ die Länge eines der unbekannten Seitenabschnitte mit einer Variablen bezeichnen. Bezeichnen wir zum Beispiel die Seitenlängen des kleinen weissen Quadrats rechts oben mit b (in cm), erhalten wir $8-b$ und $5-b$ für die Seitenlängen des rechteckigen überlappenden Teils und damit die etwas einfachere quadratische Gleichung $b^2 - 13\cdot b + 22 = 0$. Diese hat die Lösungen $b = 2$ und $b = 11$. Davon ist nur $b = 2$ möglich, und wir erhalten wie oben, dass der gesuchte Umfang gleich $4\cdot(7+2)\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$ ist.

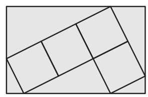
27. Jacob hat sich eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ausgedacht. Ab der dritten Zahl ist jede Zahl in der Zahlenfolge der Durchschnitt (das heisst das arithmetische Mittel) aller bisherigen Zahlen. Es ist also a_3 der Durchschnitt von a_1 und a_2, dann a_4 der Durchschnitt von a_1, a_2 und a_3 usw. Es ist $a_1 = 8$ und $a_{10} = 26$. Wie gross ist a_2?

Spanien

(**A**) 20 (**B**) 28 (**C**) 32 (**D**) 38 (**E**) 44

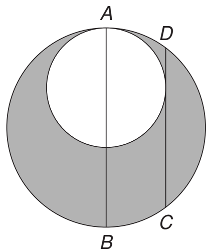
Lösung: Es gelten $a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ und $a_4 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \dfrac{a_1 + a_2 + \frac{a_1+a_2}{2}}{3} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$. Es fällt auf, dass a_4 und a_3 gleich sind. Das liegt daran, dass sich der Durchschnitt nicht ändert, wenn man „den Durchschnitt dazunimmt“. Man denke zum Beispiel an den Notendurchschnitt bei einer Klassenarbeit. Das lässt sich allgemein wie folgt beweisen: Ist $d = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ der Durchschnitt der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, so folgt $x_1 + \ldots + x_n = nd$ und damit $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n + d}{n+1} = \dfrac{nd + d}{n+1} = \dfrac{(n+1)d}{n+1} = d$. Also ist d auch der Durchschnitt der Zahlen $x_1, \ldots, x_n, d$.
Somit gilt $a_3 = a_4 = a_5 = \ldots = a_{10} = 26$ und damit $a_2 = 2a_3 - a_1 = 2 \cdot 26 - 8 = 44$.

In ein Rechteck sind wie abgebildet vier Quadrate einbeschrieben.
In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen des Rechtecks?



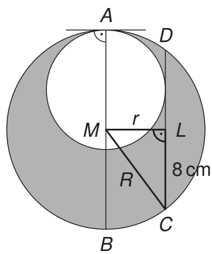
28. Zwei Kreise berühren einander wie abgebildet im Punkt A. Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des grossen Kreises. Die Strecke $\overline{CD}$ ist 16 cm lang, berührt den kleinen Kreis und ist parallel zu $\overline{AB}$.
Wie gross ist der Flächeninhalt der grauen Fläche in cm^2 ?

China



(**A**) 45π (**B**) 56π (**C**) 64π (**D**) 72π (**E**) 85π

Lösung: Wir bezeichnen die Radien des grossen und des kleinen Kreises mit R bzw. r. Der gesuchte Flächeninhalt ist $\pi R^2 - \pi r^2$.
Der Durchmesser $\overline{AB}$ verläuft durch den Mittelpunkt des grossen Kreises und steht in A senkrecht auf der Tangente in A. Da die beiden Kreise einander in A berühren, steht diese Tangente auch senkrecht auf dem Durchmesser des kleinen Kreises mit Endpunkt A, der folglich auf AB liegt. Also liegt auch der Mittelpunkt des kleinen Kreises auf $\overline{AB}$. Damit ist der Abstand der parallelen Geraden AB und CD gerade r.



Wir fällen nun das Lot vom Mittelpunkt M des grossen Kreises auf $\overline{CD}$, bezeichnen den Lotfusspunkt mit L und untersuchen das rechtwinklige Dreieck CLM. Die Länge der Kathete $\overline{ML}$ ist gleich dem Abstand der Geraden AB und CD, also r. Die Lotgerade ML halbiert die Sehne $\overline{CD}$, da die Dreiecke MCL und MLD zueinander kongruent sind (SsW). Die Kathete $\overline{CL}$ hat damit die Länge 16 cm : 2 = 8 cm. Die Hypotenuse $\overline{CM}$ ist ein Radius des grossen Kreises und hat folglich die Länge R.
Wenden wir auf das rechtwinklige Dreieck CLM den Satz des Pythagoras an, erhalten wir $R^2 = r^2 + (8\,\text{cm})^2$, woraus $R^2 - r^2 = 64\,\text{cm}^2$ und schliesslich der gesuchte Flächeninhalt $\pi R^2 - \pi r^2 = 64\pi\,\text{cm}^2$ folgt.

29. Isabella will die Zahlen von 1 bis 8 in die Zellen des 2×4-Rasters schreiben. In jeder der beiden Zeilen sollen die Zahlen von links nach rechts grösser werden. Und in jeder Spalte soll die untere Zahl grösser als die obere sein. Auf wie viele Arten kann Isabella das Raster ausfüllen?

Deutschland

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 14

Lösung: Da keine Zahl kleiner als 1 ist, muss die 1 in das Feld links oben geschrieben werden. Analog muss die 8 im Feld rechts unten stehen. Für 2 und 7 gibt es jeweils zwei Möglichkeiten, woraus sich die folgenden vier Fälle ergeben:

1	2		
		7	8

1	2		7
		6	8

1	3		
2		7	8

1	3		7
2		6	8

Im ersten Fall können in der oberen Zeile noch 3 und 4 oder 3 und 5 oder 3 und 6 oder 4 und 5 oder 4 und 6 oder 5 und 6 stehen. Die beiden Zahlen in der unteren Zeile und ihre Reihenfolge stehen dann fest, das heisst, in diesem Fall gibt es 6 mögliche Füllungen. Im zweiten Fall muss die 6 in der unteren Zeile in der zweiten Zelle von rechts stehen. Jede der drei verbleibenden Zahlen passt in die Zelle über der 6, und die beiden anderen passen in ihrer natürlichen Reihenfolge in die untere Zeile, sodass wir im zweiten Fall 3 mögliche Füllungen haben. Der dritte Fall ist ähnlich wie der zweite Fall, auch hier gibt es 3 mögliche Füllungen. Im vierten Fall müssen die 3 und die 6 in die abgebildeten Felder geschrieben werden, das ist analog zu 1 und 8 vom Beginn. Für die beiden verbleibenden Zellen gibt es 2 Möglichkeiten, sodass wir im vierten Fall 2 mögliche Füllungen haben.
Insgesamt gibt es $6 + 3 + 3 + 2 = 14$ Möglichkeiten.

30. In der Jugendherberge werden Paddeltouren angeboten. Heute nehmen 12 Kinder teil, unter ihnen 3 Geschwisterpaare. Die 12 Kinder werden auf zwei Gruppen aufgeteilt: Die erste paddelt zur Vogelinsel und die zweite zum Langen See. In jeder der beiden Gruppen sollen 6 Kinder sein.
Auf wie viele Arten können die 12 Kinder auf die beiden Gruppen aufgeteilt werden, ohne dass die Geschwisterpaare getrennt werden?

Vietnam

(**A**) 74 (**B**) 92 (**C**) 118 (**D**) 136 (**E**) 150

Lösung: Wir unterscheiden danach, wie viele der Geschwisterpaare zur Vogelinsel paddeln.

Fall 1: Es paddeln 0 Geschwisterpaare zur Vogelinsel. Dann paddeln die Geschwisterpaare alle zum Langen See und alle anderen Kinder zur Vogelinsel. Das ist eine Möglichkeit.

Fall 2: Es paddelt genau 1 Geschwisterpaar zur Vogelinsel. Für die Auswahl dieses Geschwisterpaars gibt es 3 Möglichkeiten. Die 2 anderen Geschwisterpaare paddeln zum Langen See und mit ihnen noch 2 der restlichen 6 Kinder. Für die Auswahl dieser 2 Kinder gibt es $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Möglichkeiten, insgesamt also $3 \cdot 15 = 45$ mögliche Aufteilungen.
Wer diese Formel nicht kennt, kann sich auch systematisch herleiten, dass es 15 Möglichkeiten gibt.

Fall 3: Es paddeln genau 2 Geschwisterpaare zur Vogelinsel. Dann paddelt genau 1 Geschwisterpaar zum Langen See. Dieser Fall verhält sich folglich genauso wie Fall 2 mit Vogelinsel und Langem See vertauscht. Hier gibt es ebenso 45 mögliche Aufteilungen.

Fall 4: Es paddeln alle 3 Geschwisterpaare zur Vogelinsel. Das liefert eine Möglichkeit wie im ersten Fall.

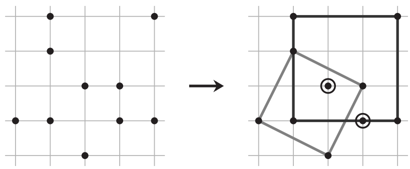
Insgesamt erhalten wir $1 + 45 + 45 + 1 = 92$ mögliche Aufteilungen.

Gitterquadrate

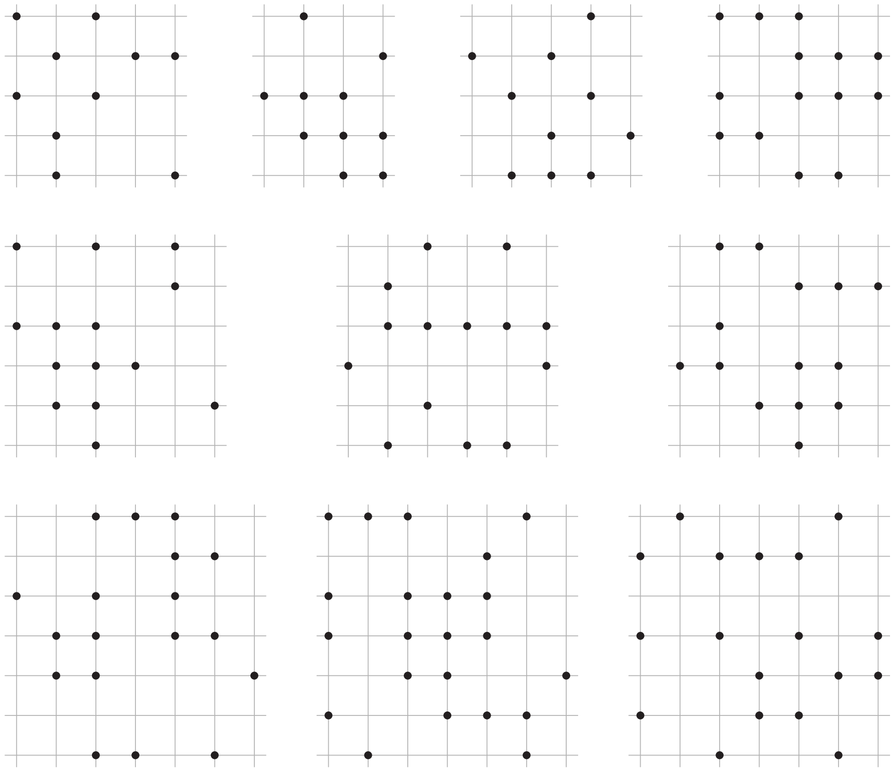
In den abgebildeten Gittern sind einige Kreuzungspunkte dick gezeichnet. Gesucht sind Quadrate, deren vier Eckpunkte solche dicken Punkte sind.

In jedem Gitter sollen bis auf genau zwei der dicken Punkte alle dicken Punkte als Eckpunkt zu einem Quadrat gehören. Die Quadrate dürfen sich überlappen, aber keiner der dicken Punkte darf Eckpunkt von mehr als einem Quadrat sein.

Hier ist ein Beispiel, die beiden markierten dicken Punkte gehören zu keinem der Quadrate:

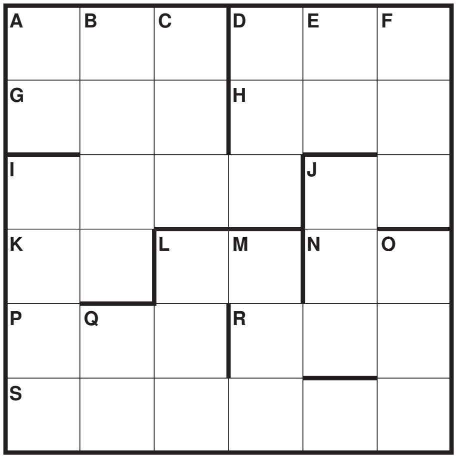


Wer findet die Quadrate in den folgenden Gittern?
Welche zwei Punkte gehören jeweils zu keinem der Quadrate?



Ein Kreuzzahlrätsel voller Quadratzahlen

Kreuzzahlrätsel sind ähnlich zu Kreuzworträtseln, nur dass in die Felder Ziffern statt Buchstaben zu schreiben sind. Die Ziffern bilden Zahlen, die jeweils die angegebenen Bedingungen erfüllen müssen. Keine Zahl darf mit der Ziffer 0 beginnen.



Waagerecht

A Quadratzahl mit der Quersumme 9

D Gleiche Zahl wie **D Senkrecht**

G Alle Ziffern dieser Zahl sind Quadratzahlen

H Quadrat einer geraden Quadratzahl

I Alle Ziffern dieser Zahl sind Quadratzahlen, Quersumme ist **N Waagerecht**

J Primzahl mit der gleichen Einerziffer wie **Q Senkrecht**

K Das 11-fache einer Quadratzahl

L Die Quersumme dieser Zahl ist eine Quadratzahl

N Das 2-fache einer Quadratzahl

P Quadratzahl und Palindrom

R Die Ziffern werden immer kleiner

S Das 10101-fache einer Quadratzahl

Senkrecht

A Quadratzahl, deren Ziffern ebenfalls Quadratzahlen sind

B Alle Ziffern sind gleich und Quadratzahlen

C **A Waagerecht** rückwärts

D Ungerade Quadratzahl mit Quersumme 18

E Quadratzahl

F Quadratzahl

I Vorgänger von **I Waagerecht**

J Die Quersumme dieser Zahl ist 12

L Differenz aus **D Waagerecht** und **Q Senkrecht**

M Quadratzahl

O Quadratzahl

Q Diese Zahl ist das Quadrat ihrer Quersumme

Hinweis: Die Quadratzahlen bis 1000 lauten: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961.

Autorin: Annelies Paulitsch (www.a-paulitsch.de)

Klassenstufen 11 bis 13

1. Welcher der folgenden Brüche hat den grössten Wert?

Tunesien

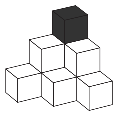
(**A**) $\frac{20}{25}$ (**B**) $\frac{20}{2+5}$ (**C**) $\frac{20}{-2+5}$ (**D**) $\frac{20}{2-5}$ (**E**) $\frac{20}{2\cdot 5}$

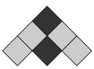
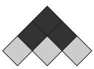
Lösung: Bei allen fünf Brüchen steht 20 im Zähler. Der Bruch bei (**D**) ist negativ und damit kleiner als die anderen. Von den anderen vier Brüchen hat der bei (**C**) den kleinsten Nenner, also den grössten Wert.

— Eine ähnliche Frage mit einer Variablen war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 10 gestellt. —

2. Mit schwarzen und grauen Würfeln wird die abgebildete Würfelpyramide gebaut. Würfel, die einander mit einer Seitenfläche berühren, sollen verschiedene Farben haben. Ganz oben soll ein schwarzer Würfel sein. Wie sieht die fertige Pyramide von oben aus?

Polen



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Der Würfel direkt unter der Spitze muss grau sein. Da die beiden sichtbaren Würfel in der mittleren Schicht diesen grauen Würfel jeweils mit einer Seitenfläche berühren, müssen sie schwarz sein. Die Würfel unter diesen beiden schwarzen Würfeln müssen wiederum grau sein. Und da die drei sichtbaren Würfel in der unteren Schicht jeweils einen grauen Würfel mit einer Seitenfläche berühren, sind sie alle schwarz. Die Lösung ist somit (**A**).

3. In welchem Bereich liegt das Produkt $88 \cdot 888$?

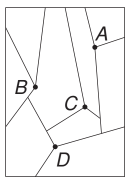
Australien

(**A**) zwischen 888 und 4444 (**B**) zwischen 4444 und 8888 (**C**) zwischen 8888 und 44444
(**D**) zwischen 44444 und 88888 (**E**) zwischen 88888 und 444444

Lösung: Da wir nur einen Bereich suchen, in dem das Produkt liegt, genügen Abschätzungen nach unten und nach oben. Es gilt $88 \cdot 888 > 80 \cdot 800 = 64000$ und $88 \cdot 888 < 90 \cdot 900 = 81000$. Also liegt das Produkt zwischen 44444 und 88888.

4. Auf einem Blatt Papier hat Viola 4 Punkte markiert. Dann hat sie die Punkte einen nach dem anderen ausgewählt und von jedem Punkt aus jeweils 3 Strecken gezeichnet. Jede Strecke endet entweder am Rand des Blattes oder an einer schon gezeichneten Strecke. In welcher Reihenfolge hat Viola die Punkte ausgewählt?

Griechenland



(**A**) *D A C B* (**B**) *A D B C* (**C**) *B D A C* (**D**) *B C D A* (**E**) *D A B C*

Lösung: Es gibt 4 Strecken, die nicht am Rand des Blattes enden. An deren Endpunkten können wir ablesen, in welcher Reihenfolge die Punkte ausgewählt wurden.
Von *A* geht eine Strecke aus, die an einer Strecke endet, die von *D* ausgeht. Das heisst, dass *D* vor *A* ausgewählt wurde. Von *C* geht eine Strecke aus, die an einer Strecke endet, die von *A* ausgeht, und eine zweite, die an einer Strecke endet, die von *D* ausgeht. Das heisst, dass *A* und *D* vor *C* ausgewählt wurden. Und von *D* geht eine Strecke aus, die an einer Strecke endet, die von *B* ausgeht. Das heisst, dass *B* vor *D* ausgewählt wurde. Viola hat die Punkte in der Reihenfolge *B D A C* ausgewählt.

5. Dimitry hat 20 Kugeln. Jede von ihnen ist entweder rot, schwarz, gelb oder blau. Es sind genau 17 Kugeln nicht rot, 15 Kugeln nicht schwarz und 12 Kugeln nicht gelb. Wie viele blaue Kugeln hat Dimitry?

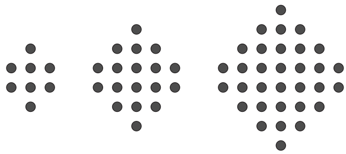
Ukraine

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

Lösung: Von den 20 Kugeln sind 17 nicht rot, das heisst, dass $20 - 17 = 3$ Kugeln rot sind. Da 15 Kugeln nicht schwarz und 12 Kugeln nicht gelb sind, sind $20 - 15 = 5$ Kugeln schwarz und $20 - 12 = 8$ Kugeln gelb. Die übrigen $20 - 3 - 5 - 8 = 4$ Kugeln sind demzufolge blau.

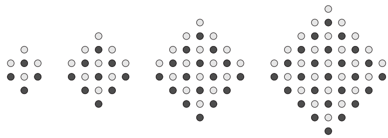
6. Die abgebildeten Figuren sind die ersten 3 Figuren einer Folge. Aus wie vielen Punkten besteht die 4. Figur in dieser Folge?

Spanien



(**A**) 46 (**B**) 50 (**C**) 52 (**D**) 56 (**E**) 58

Lösung: Wenn wir uns die Punkte abwechselnd hell und dunkel denken, erkennen wir in jeder Figur ein helles und ein dunkles Quadrat, jeweils auf der Spitze stehend. In der 1. Figur bestehen die Quadrate aus $2 \cdot 2$ Punkten, in der 2. Figur aus $3 \cdot 3$, in der 3. Figur aus $4 \cdot 4$ und in der 4. Figur schliesslich aus $5 \cdot 5$ Punkten. Die 4. Figur in der Folge besteht somit aus insgesamt $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ Punkten.



Lösungsvariante: Jede Figur in der Folge besitzt eine waagerechte Symmetrieachse. In der 1. Figur besteht die Hälfte oberhalb der Symmetrieachse aus $(1 + 3)$ Punkten, in der 2. Figur aus $(1 + 3 + 5)$, in der 3. Figur aus $(1 + 3 + 5 + 7)$, usw. Die 4. Figur besteht also insgesamt aus $2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 50$ Punkten.

7. Welche Potenz hat denselben Wert wie $\sqrt{16^{25}}$?

Grossbritannien

(**A**) 4^5 (**B**) 16^5 (**C**) 8^{25} (**D**) 32^5 (**E**) 4^{25}

Lösung: Es gilt $\sqrt{16^{25}} = \sqrt{16}^{25} = 4^{25}$, oder anders gerechnet $\sqrt{16^{25}} = \sqrt{(4^2)^{25}} = \sqrt{(4^{25})^2} = 4^{25}$.

8. Mein Zimmer ist $15\,\text{m}^2$ gross. Ich habe den Grundriss meines Zimmers im Massstab 1 : 100 gezeichnet. Wie gross ist mein Zimmer auf der Zeichnung?

Neuseeland

(**A**) $1{,}5\,\text{cm}^2$ (**B**) $15\,\text{cm}^2$ (**C**) $150\,\text{cm}^2$ (**D**) $1500\,\text{cm}^2$ (**E**) $15000\,\text{cm}^2$

Lösung: Eine Strecke der Länge 100 cm in der Wirklichkeit ist auf der Zeichnung 1 cm lang. Das heisst, dass 1 m in der Wirklichkeit 1 cm auf der Zeichnung entspricht. Die Fläche von $1\,\text{m}^2 = 1\,\text{m} \cdot 1\,\text{m}$ in der Wirklichkeit ist also auf der Zeichnung $1\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} = 1\,\text{cm}^2$ gross. Also ist das Zimmer auf der Zeichnung $15\,\text{cm}^2$ gross.

9. Zwei normale 6-seitige Spielwürfel werden geworfen und die beiden Augenzahlen miteinander multipliziert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis eine Primzahl ist?

Spanien

(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{5}$ (**D**) $\frac{1}{6}$ (**E**) $\frac{1}{7}$

Lösung: Das Ergebnis ist genau dann eine Primzahl, wenn einer der Spielwürfel eine 1 und der andere eine Primzahl, also 2, 3 oder 5, zeigt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ergebnis eine Primzahl ist, ist folglich $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

10. Früher waren Johannas Lieblingsmüsliriegel in Packungen mit je 5 Riegeln verpackt. Jetzt sind nur noch 4 Riegel in einer Packung, aber die Packungen werden zum gleichen Preis verkauft. Um wie viel Prozent ist der Preis pro Riegel gestiegen?

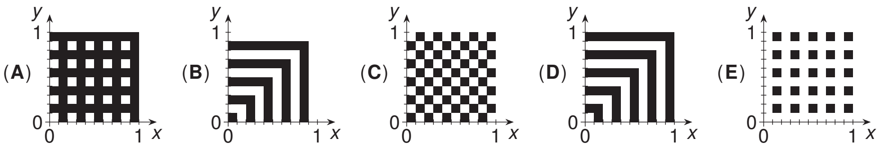
Deutschland

(**A**) um 10 % (**B**) um 15 % (**C**) um 25 % (**D**) um 30 % (**E**) um 40 %

Lösung: Wir bezeichnen mit P den alten Preis pro Riegel. Die Packung kostet demzufolge wie vor der Preiserhöhung $5P$. Der neue Preis pro Riegel liegt somit bei $\frac{5P}{4} = 1\frac{1}{4} \cdot P$. Der Preis pro Riegel ist also um $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, das heisst um 25 % gestiegen.

11. In der x-y-Ebene ist in dem durch $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ definierten Bereich ein Teil schwarz gefärbt. Ein Punkt $(x\,|\,y)$ ist genau dann schwarz gefärbt, wenn sowohl bei x als auch bei y die Ziffer an der ersten Nachkommastelle ungerade ist. Wie sieht das aus?

Finnland



Lösung: Ein Punkt ist genau dann schwarz, wenn sowohl seine x- als auch seine y-Koordinate entweder zwischen 0,1 und 0,2 oder zwischen 0,3 und 0,4 oder zwischen 0,5 und 0,6 oder zwischen 0,7 und 0,8 oder zwischen 0,9 und 1,0 liegt. Das ist bei (**E**) zu sehen.

12. Es sei M die grösste von 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen, von denen genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar sind. Was ist der kleinstmögliche Wert, den M haben kann?

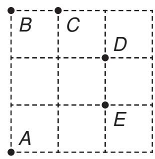
Afghanistan

(**A**) 105 (**B**) 77 (**C**) 75 (**D**) 70 (**E**) 63

Lösung: In jeder Menge aus 10 Zahlen mit genau 5 durch 5 teilbaren Zahlen und genau 7 durch 7 teilbaren Zahlen gibt es mindestens $5+7-10 = 2$ Zahlen, die sowohl durch 5 als auch durch 7 teilbar sind. Es gibt also mindestens 2 Zahlen, die durch $\text{kgV}(5,7) = 35$ teilbar sind. Die beiden kleinsten positiven ganzen Zahlen, die durch 35 teilbar sind, sind 35 und 70. Somit gibt es in einer solchen Menge immer mindestens eine Zahl, die grösser oder gleich 70 ist. Da es Mengen mit der gefordeten Eigenschaft gibt, in denen 70 die grösste Zahl ist, zum Beispiel $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 45, 55, 65, 70\}$, ist 70 die Lösung.

13. Robert möchte einen der 5 markierten Punkte A, B, C, D, E entfernen. Die 6 Strecken, die je 2 der verbleibenden 4 Punkte verbinden, sollen alle unterschiedlich lang sein. Welchen Punkt muss Robert entfernen?

Finnland



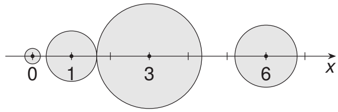
(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

Lösung: Da die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{DE}$ gleich lang sind, muss Robert einen der Punkte B, C, D, E entfernen, der Punkt A muss bleiben. Da die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{BD}$ gleich lang sind, muss Robert einen der Punkte A, B, D, E entfernen, der Punkt C muss bleiben. Und da die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CE}$ gleich lang sind, muss Robert einen der Punkte A, C, E entfernen. Da von diesen 3 Punkten A und C sicher bleiben müssen, muss Robert folglich den Punkt E entfernen.

Ist die Zahl 3 141 592 653 589 793 eine Quadratzahl?
Diese Frage soll natürlich ohne Taschenrechner beantwortet werden.

14. Auf der Zahlengeraden sind bei 0, 1, 3 und 6 die Mittelpunkte von vier Kreisscheiben. Ihre Radien sind r_1, r_2, r_3 und r_4. Die Kreisscheiben dürfen einander berühren, aber nicht überlappen. Was ist der grösstmögliche Wert, den $r_1+r_2+r_3+r_4$ haben kann?

Finnland

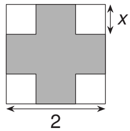


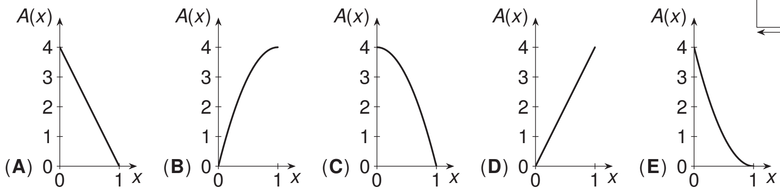
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Die Mittelpunkte der beiden linken Kreisscheiben liegen bei 0 und 1. Da sich diese Kreisscheiben nicht überlappen dürfen, ist die Summe ihrer Radien kleiner oder gleich $|1-0| = 1$. Die Mittelpunkte der beiden rechten Kreisscheiben liegen bei 3 und 6. Da sich diese Kreisscheiben nicht überlappen dürfen, ist die Summe ihrer Radien kleiner oder gleich $|6-3| = 3$. Die Summe aller vier Radien ist folglich kleiner oder gleich $1+3 = 4$. Mit dieser Summe gibt es unendlich viele Möglichkeiten, wie gross die Radien der einzelnen Kreisscheiben sein könnten, zum Beispiel $r_1 = r_2 = 0{,}5$ und $r_3 = r_4 = 1{,}5$. Also ist der gesuchte grösstmögliche Wert 4.

15. An jeder Ecke eines Quadrats mit Seitenlänge 2 wird ein Quadrat mit Seitenlänge x abgeschnitten. $A(x)$ ist der Flächeninhalt des verbleibenden Kreuzes in Abhängigkeit von x. Wie sieht der Graph der Funktion A aus?

Brasilien

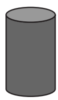


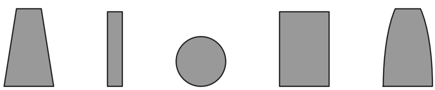


Lösung: Für jede beliebige Zahl x zwischen 0 und 1 ist $A(x)$ der Flächeninhalt des Quadrats mit Seitenlänge 2 verringert um den 4-fachen Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge x. Folglich gilt $A(x) = 4 - 4x^2$. Der Graph dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die y-Achse im Punkt $(0|4)$ schneidet. Er ist bei (**C**) zu sehen.

Luke schneidet mit seinem Laserschwert den abgebildeten Baumstumpf mit einem geraden Schnitt in zwei Teile.

Welche der folgenden Formen kann die Schnittfläche haben?





16. Wie viele 5-stellige Zahlen der Form $\overline{A18AA}$ gibt es, die durch 18 teilbar sind?

Schweiz

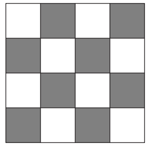
(**A**) eine (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) vier (**E**) fünf

Lösung: Da die Zahl $\overline{A18AA}$ 5-stellig ist, ist A ungleich 0. Eine Zahl der Form $\overline{A18AA}$ ist genau dann durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist. Damit sie durch 2 teilbar ist, muss A gerade sein. Und damit sie durch 9 teilbar ist, muss ihre Quersumme $A + 1 + 8 + A + A = 9 + 3A$ durch 9 teilbar sein. Das ist genau dann der Fall, wenn A durch 3 teilbar ist. Die einzige von 0 verschiedene Ziffer, die gerade und durch 3 teilbar ist, ist 6. Also gibt es nur eine 5-stellige Zahl der Form $\overline{A18AA}$, die durch 18 teilbar ist, nämlich 61866 $(= 18 \cdot 3437)$.

— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 9/10 die Aufgabe 18. —

17. Finnland

Auf einem 4×4-Schachbrett stehen 16 Kängurus, eines auf jedem Feld. Bei jedem Zug springen alle Kängurus gleichzeitig. Jedes Känguru springt dabei auf ein benachbartes Feld nach oben, unten, links oder rechts. Es dürfen mehrere Kängurus auf demselben Feld stehen. Wie viele leere Felder kann es nach 10 Zügen höchstens geben?



(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 13 (**D**) 12 (**E**) 11

Lösung: Da jedes Känguru immer abwechselnd auf einem weissen und einem schwarzen Feld steht, sind zu jedem Zeitpunkt mindestens ein schwarzes und ein weisses Feld besetzt. Es sind also nie mehr als 14 Felder leer. Das folgende Beispiel zeigt, wie die Kängurus so springen können, dass nach 10 Zügen 14 Felder leer sind. Jedes Känguru springt so weit nach unten und nach links, bis es auf dem Feld unten links ankommt. Das ist spätestens nach 6 Zügen der Fall. Ist ein Känguru unten links angekommen, springt es abwechselnd ein Feld nach rechts und wieder zurück. So sind alle Kängurus ab dem 6. Zug entweder auf dem Feld links unten oder auf dem rechts daneben, sodass es dann immer 14 leere Felder gibt.

18. Griechenland

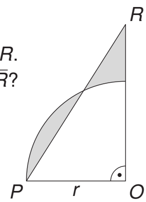
Welche ist die kleinste positive ganze Zahl N, sodass $\sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{N}}}$ eine ganze Zahl ist?

(**A**) $2^6 \cdot 3^6$ (**B**) $2^2 \cdot 3^8$ (**C**) $2^4 \cdot 3^{10}$ (**D**) $2^6 \cdot 3^8$ (**E**) $2^4 \cdot 3^6$

Lösung: Wir formen um: $\sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{N}}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{N}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot N}}} = \sqrt[8]{2^4 \cdot 3^2 \cdot N}$. Also ist $\sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{N}}}$ genau dann eine ganze Zahl, wenn unter der 8-ten Wurzel eine 8-te Potenz steht. Die kleinste positive ganze Zahl N, die das erfüllt, ist $N = 2^{8-4} \cdot 3^{8-2} = 2^4 \cdot 3^6$.

19. Grossbritannien

Die Abbildung zeigt einen Viertelkreis mit Radius r und das rechtwinklige Dreieck POR. Die beiden grauen Gebiete haben den gleichen Flächeninhalt. Wie lang ist die Strecke $\overline{OR}$?

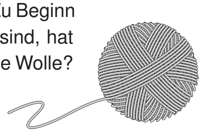


(**A**) $\frac{\pi r}{2}$ (**B**) $\frac{3r}{2}$ (**C**) πr (**D**) $\frac{\pi^2 r}{6}$ (**E**) $\sqrt{3}r$

Lösung: Der Viertelkreis und das Dreieck bestehen jeweils aus dem weissen und einem grauen Gebiet. Da die beiden grauen Gebiete den gleichen Flächeninhalt haben, haben der Viertelkreis und das Dreieck den gleichen Flächeninhalt. Deren Flächeninhalte sind $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot r \cdot |OR|$. Setzen wir diese beiden Terme gleich und stellen nach $|OR|$ um, erhalten wir $|OR| = \frac{\pi r}{2}$.

20. Finnland

Aus einem grossen Wollknäuel strickt die Grossmutter lauter gleiche Babysocken. Zu Beginn hatte das Wollknäuel einen Durchmesser von 20 cm. Nachdem 14 Socken fertig sind, hat das Wollknäuel einen Durchmesser von 10 cm. Für wie viele Socken reicht die übrige Wolle?



(**A**) 8 (**B**) 6 (**C**) 4 (**D**) 3 (**E**) 2

Lösung: Der Durchmesser des Wollknäuels war vor dem Stricken 2-mal so gross wie nach dem Stricken der 14 Socken. Bei der Streckung eines 3-dimensionalen Körpers um den Faktor k, ändert sich das Volumen um den Faktor k^3, es geht quasi ein Faktor k je Raumrichtung ein. Folglich war das Volumen des Wollknäuels wegen $2^3 = 8$ zu Beginn 8-mal so gross wie sein Volumen jetzt. Nachdem 14 Socken fertig sind, ist noch $\frac{1}{8}$ der Wolle übrig. Das heisst, dass $\frac{7}{8}$ der Wolle, also das 7-fache der noch übrigen Wolle, verstrickt wurde. Die übrige Wolle reicht somit noch für $14 : 7 = 2$ Socken.

21. Griechenland

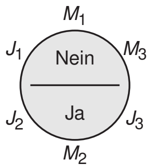
Jasper hat ein kleines Computerprogramm geschrieben, das für zwei Zahlen ihre Summe und ihre positive Differenz ausgibt und dies für die Ergebnisse immer wieder wiederholt. So will er herausfinden, wie sich die Zahlen entwickeln. Er startet das Programm mit 5 und 3. Die erste Ausgabe sind die Zahlen 8 und 2. Welche zwei Zahlen erhält Jasper bei der 50. Ausgabe?

(**A**) $5 \cdot 2^{25}$ und $3 \cdot 2^{25}$ (**B**) 5^{25} und 3^{25} (**C**) 2^{28} und 2^{26}
(**D**) 5^{26} und 3^{26} (**E**) $2 \cdot 5^{25}$ und $2 \cdot 3^{25}$

Lösung: Starten wir mit den Zahlen a und b ($a \geq b$), so gibt Jaspers Computerprogramm $(a+b)$ und $(a-b)$ aus. Als zweite Ausgabe gibt es dann $(a+b)+(a-b) = 2a$ und $(a+b)-(a-b) = 2b$ aus, also jeweils das Doppelte der beiden Zahlen, mit denen wir gestartet sind. Alle 2 Schritte verdoppeln sich somit die Zahlen. Innerhalb von $50 = 2 \cdot 25$ Schritten verdoppelt das Programm die Zahlen jeweils 25 Mal. Nach dem 50. Schritt gibt das Programm also das 2^{25}-fache der beiden Startzahlen aus, also $a \cdot 2^{25}$ und $b \cdot 2^{25}$. Jasper erhält bei seinen Startzahlen 5 und 3 bei der 50. Ausgabe somit die Zahlen $5 \cdot 2^{25}$ und $3 \cdot 2^{25}$.

22. Griechenland

Eine Gruppe von Marsianern, M_1, M_2 und M_3, und eine Gruppe von Jupiterianern, J_1, J_2 und J_3, sitzen wie abgebildet um einen Tisch. Jedes Mitglied der einen Gruppe sagt immer die Wahrheit und jedes Mitglied der anderen Gruppe lügt immer. Einer der sechs hat den Schlüssel zu ihrem gemeinsamen Raumschiff. Auf die Frage „Hat eine der beiden Personen, die neben dir sitzen, den Schlüssel?“ antworten J_1, M_1 und M_3 mit „Nein“, die anderen mit „Ja“. Wer hat den Schlüssel?

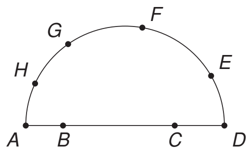


(**A**) J_1 (**B**) J_2 (**C**) J_3 (**D**) M_1 (**E**) M_2

Lösung: Es gibt 2 Fälle zu untersuchen: Entweder lügen die drei Marsianer oder die drei Jupiterianer. Angenommen, die Marsianer würden lügen. Dann folgt aus der Aussage von M_1, dass entweder J_1 oder M_3 den Schlüssel hat. Aber aus der Aussage von M_3 folgt, dass entweder M_1 oder J_3 den Schlüssel hat. Das ist ein Widerspruch, das heisst, dass die Marsianer die Wahrheit sagen und die Jupiterianer lügen. Aus der Aussage von M_2 folgt, dass entweder J_2 oder J_3 den Schlüssel hat, und aus der Aussage von M_3 folgt, dass J_3 den Schlüssel nicht hat. Folglich hat J_2 den Schlüssel zum Raumschiff.

23. Syrien

Auf einem Halbkreis mit dem Durchmesser $\overline{AD}$ liegen die Punkte B und C auf dem Durchmesser und die Punkte E, F, G und H auf dem Bogen des Halbkreises. Wie viele Dreiecke können gebildet werden, deren Eckpunkte 3 dieser 8 Punkte sind?



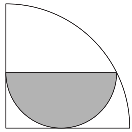
(**A**) 48 (**B**) 49 (**C**) 50 (**D**) 52 (**E**) 54

Lösung: Es gibt $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ Möglichkeiten, 3 der 8 Punkte auszuwählen. Sie bilden genau dann ein Dreieck, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen. Auf einer Geraden liegen sie nur, wenn sie alle drei auf dem Durchmesser liegen. Das sind die 4 Fälle $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$ und $\{B, C, D\}$. In den anderen $56 - 4 = 52$ Fällen lässt sich jeweils mit den 3 gewählten Punkten ein Dreieck bilden.
Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir die zu zählenden Dreiecke danach unterteilen, wie viele Eckpunkte auf dem Durchmesser $\overline{AD}$ liegen: 0, 1 oder 2. Mit 0 Eckpunkten auf $\overline{AD}$ gibt es 4 Dreiecke, mit einem Eckpunkt auf $\overline{AD}$ gibt es $4 \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 6 = 24$ Dreiecke und mit 2 Eckpunkten auf $\overline{AD}$ gibt es $\binom{4}{2} \cdot 4$, also ebenfalls 24 Dreiecke. Das sind insgesamt $4 + 24 + 24 = 52$ Dreiecke.

Wer findet drei verschiedene Ziffern A, B, C, für die $\overline{ABC} + \overline{B} \cdot \overline{BBB} = 2025$ gilt?

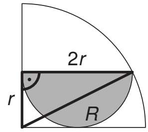
24. Der Flächeninhalt des grauen Halbkreises beträgt 12 cm^2.
Welchen Flächeninhalt hat der grosse Viertelkreis?

Deutschland



(**A**) 42 cm^2 (**B**) 36 cm^2 (**C**) 32 cm^2 (**D**) 30 cm^2 (**E**) 25 cm^2

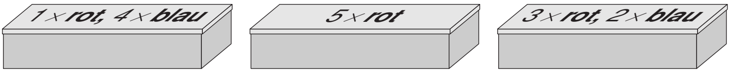
Lösung: Wir bezeichnen den Radius des grauen Halbkreises mit r und den Radius des grossen Viertelkreises mit R. Für den Flächeninhalt des grauen Halbkreises gilt nach Voraussetzung $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 12\,\text{cm}^2$.



Wenden wir den Satz des Pythagoras auf das rechts markierte rechtwinklige Dreieck an, so erhalten wir $r^2 + (2r)^2 = R^2$, also $5r^2 = R^2$. Der gesuchte Flächeninhalt des grossen Viertelkreises beträgt folglich $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (5r^2) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2\right) = \frac{5}{2} \cdot 12\,\text{cm}^2 = 30\,\text{cm}^2$.

25. Auf dem Tisch stehen 3 Schachteln, die jeweils 5 Kugeln enthalten. Die Deckel sind vertauscht. Auf jedem Deckel steht, was eine der beiden anderen Schachteln enthält. Aleyna und Luis nutzen das für ein Spiel.

Bulgarien



Aleyna soll in so wenig Zügen wie möglich den Inhalt von jeder der drei Kisten bestimmen. In jedem Zug wählt Aleyna eine Kiste aus, und aus dieser Kiste gibt Luis ihr eine Kugel. Luis wählt dabei die Kugeln so aus, dass Aleyna möglichst viele Züge benötigt. Wie viele Züge benötigt Aleyna?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Es gibt nur 2 Möglichkeiten dafür, wie die Deckel zu den Kisten passen können:
(5 × rot) – (3 × rot, 2 × blau) – (1 × rot, 4 × blau) oder (3 × rot, 2 × blau) – (1 × rot, 4 × blau) – (5 × rot).
Daher genügt es für Aleyna, den Inhalt von einer der drei Kisten zu bestimmen.
In jeder Kiste liegt mindestens eine rote Kugel. Falls Luis im 1. Zug Aleyna eine rote Kugel gibt – egal, welche Kiste sie wählt –, kann Aleyna noch nicht zuordnen, welche Kugeln sich in den 3 Kisten befinden. Ein Zug reicht Aleyna also nicht. Aber mit der folgenden Strategie reichen ihr 2 Züge:
In der Kiste ganz rechts liegen entweder 5 rote Kugeln oder 1 rote und 4 blaue Kugeln. Wenn sie im 1. Zug diese Kiste wählt, muss Luis ihr eine rote Kugel geben, da ansonsten für Aleyna die Reihenfolge (5 × rot) – (3 × rot, 2 × blau) – (1 × rot, 4 × blau) sofort klar wäre. Wenn sie dann im 2. Zug erneut die Kiste ganz rechts wählt, gibt ihr Luis entweder eine blaue oder eine rote Kugel. Ist sie blau, muss die Reihenfolge der Kisten (5 × rot) – (3 × rot, 2 × blau) – (1 × rot, 4 × blau) sein. Ist sie dagegen rot, muss die Reihenfolge der Kisten (3 × rot, 2 × blau) – (1 × rot, 4 × blau) – (5 × rot) sein. Also benötigt Aleyna 2 Züge.

26. Lorena und ihr kleiner Bruder Dani fahren gleichzeitig mit dem Fahrrad von zu Hause los. Sie fahren auf demselben Weg mit konstanter Geschwindigkeit, Lorena mit 18 km/h und Dani mit 12 km/h. Nach 20 Minuten ist Lorena müde und fährt auf demselben Weg zurück nach Hause. Als sie Dani trifft, dreht auch Dani um und fährt zurück nach Hause. Wie lange muss Lorena zu Hause warten, bis Dani ankommt?

Spanien

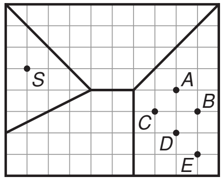
(**A**) 4 Minuten (**B**) 6 Minuten (**C**) 8 Minuten (**D**) 10 Minuten (**E**) 15 Minuten

Lösung: 20 Minuten sind ein Drittel einer Stunde. Nach 20 Minuten ist Lorena daher $\frac{1}{3} \cdot 18\,\text{km} = 6\,\text{km}$ von zu Hause entfernt und Dani $\frac{1}{3} \cdot 12\,\text{km} = 4\,\text{km}$. Nachdem Lorena umgedreht hat, trifft sie nach $\frac{6\,\text{km} - 4\,\text{km}}{18\,\text{km/h} + 12\,\text{km/h}} = \frac{2}{30}\,\text{h} = 4\,\text{min}$ auf Dani. Da Lorena für ihren Rückweg genauso lange benötigt wie für ihren Hinweg, kommt sie nach weiteren 20 min − 4 min = 16 min zu Hause an. Da Dani für seinen Rückweg genauso lange benötigt wie für seinen Hinweg, kommt er erst 20 min + 4 min = 24 min nach der Begegnung zu Hause an. Lorena muss also 24 min − 16 min = 8 min auf Dani warten.

— Eine ähnliche, etwas leichtere Aufgabe war in Klassenstufe 7/8 die Aufgabe 19. —

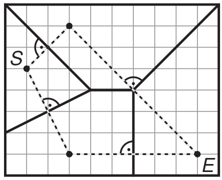
27. Rechts ist schematisch eine Stadt dargestellt, in der es vier Grundschulen gibt, und die vier Einzugsbereiche dieser Schulen. Der Einzugsbereich jeder Schule ist die Menge aller Punkte, für die diese Schule näher liegt als jede der drei anderen Schulen. Die Schule im Bereich ganz links befindet sich im Punkt *S*. In welchem Punkt befindet sich die Schule im Bereich ganz rechts?

Griechenland

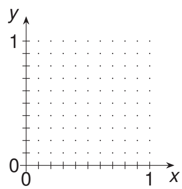


(**A**) in *A* (**B**) in *B* (**C**) in *C* (**D**) in *D* (**E**) in *E*

Lösung: Alle Punkte auf der Grenze zwischen zwei Einzugsbereichen haben zu den beiden darin stehenden Schulen denselben Abstand. Also ist die Grenze zwischen zwei Einzugsbereichen Teil der Mittelsenkrechten zwischen den beiden darin befindlichen Schulen, denn die Mittelsenkrechte ist die Menge aller Punkte, die zu zwei gegebenen Punkten denselben Abstand haben. Die Schulen in zwei benachbarten Einzugsbereichen liegen bezüglich der Grenze gespiegelt zueinander. Wenn wir *S* an der Grenze zum Einzugsbereich unten links spiegeln, finden wir die Schule in diesem Einzugsbereich. Wenn wir diesen Punkt anschliessend an der Grenze zum Bereich ganz rechts spiegeln, finden wir, dass die Schule dort im Punkt *E* liegt. Den Punkt *E* finden wir natürlich auch, wenn wir an den Grenzen des oberen Bereichs spiegeln.

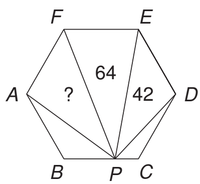


In der x-y-Ebene wird in dem durch $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ *definierten Bereich ein Teil schwarz gefärbt.*
Ein Punkt $(x|y)$ *wird genau dann schwarz gefärbt, wenn sowohl bei* $x + y$ *als auch bei* $x - y$ *die Ziffer an der ersten Nachkommastelle ungerade ist. Wie sieht das aus?*



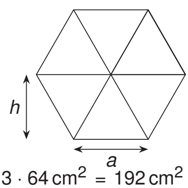
28. Im regelmässigen Sechseck *ABCDEF* liegt der Punkt *P* auf der Seite $\overline{BC}$. Das Dreieck *PEF* hat einen Flächeninhalt von $64\,\text{cm}^2$, und das Dreieck *PDE* hat einen Flächeninhalt von $42\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck *PFA*?

China



(**A**) $53\,\text{cm}^2$ (**B**) $54\,\text{cm}^2$ (**C**) $56\,\text{cm}^2$ (**D**) $60\,\text{cm}^2$ (**E**) $64\,\text{cm}^2$

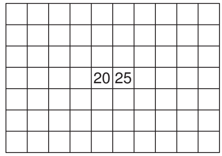
Lösung: Wir bezeichnen mit *a* die Seitenlänge des regelmässigen Sechsecks *ABCDEF* und mit *h* die halbe Höhe. Das regelmässige Sechseck lässt sich wie abgebildet in 6 kongruente Dreiecke zerlegen, und jedes von ihnen hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ah$. Das Sechseck hat also den Flächeninhalt $6 \cdot \frac{1}{2}ah = 3ah$. Der Flächeninhalt des Dreiecks *PEF* ist gleich $\frac{1}{2} \cdot a \cdot (2h) = ah$ und das ist nach Voraussetzung gleich $64\,\text{cm}^2$. Daraus folgt, dass das Sechseck den Flächeninhalt $3 \cdot 64\,\text{cm}^2 = 192\,\text{cm}^2$ hat. Die beiden Dreiecke *BPA* und *PCD* haben zusammen den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot |BP| \cdot h + \frac{1}{2} \cdot |PC| \cdot h$, das heisst $\frac{1}{2} \cdot (|BP| + |PC|) \cdot h = \frac{1}{2}ah = 32\,\text{cm}^2$. Nun können wir den gesuchten Flächeninhalt des Dreiecks *PFA*



berechnen: $A_{PFA} = A_{ABCDEF} - A_{PEF} - A_{PDE} - (A_{PCD} + A_{BPA}) = 192\,\text{cm}^2 - 64\,\text{cm}^2 - 42\,\text{cm}^2 - 32\,\text{cm}^2 = 54\,\text{cm}^2$.

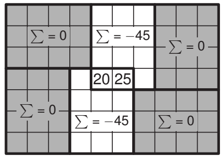
29. Estland

In jeder Zelle eines 7×10-Rechtecks steht eine ganze Zahl. Die Summe aller Zahlen in einem beliebigen 3×4-Rechteck oder 4×3-Rechteck ist 0. In den beiden Zellen in der Mitte stehen die Zahlen 20 und 25.
Was ist die Summe aller Zahlen im 7×10-Rechteck?



(**A**) -45 (**B**) -25 (**C**) -20 (**D**) -5 (**E**) 5

Lösung: Wir zeichnen in das 7×10-Rechteck möglichst viele 3×4- und 4×3-Rechtecke ein, die sich nicht überlappen. Von diesen Gebieten wissen wir, dass die Summe aller Zahlen in ihnen 0 ist (siehe graue Gebiete). In der Mitte kann entweder oben oder unten ein weiteres 3×4-Rechteck eingezeichnet werden. Das bedeutet, dass die Summe der Zahlen in diesen beiden Rechtecken ohne die beiden mittleren Felder $0 - 20 - 25 = -45$ sein muss. Somit ist die Summe aller Zahlen gleich $20 + 25 + (-45) + (-45) = -45$.

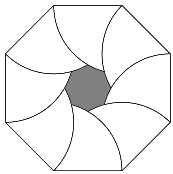


Eine Lösungsvariante besteht darin, ein Beispiel für eine mögliche Belegung des 7×10-Rechtecks zu finden. Die Summe der Zahlen in jedem 3×4- und 4×3-Rechteck ist 0, wenn in jedem 1×4- und 4×1-Rechteck die Summe 0 ist. Wir füllen also jede Zeile so mit Zahlen auf, dass 4 nebeneinanderstehende Zahlen immer die Summe 0 haben, das heisst $\ldots, -25, 20, 25, -20, -25, 20, 25, -20, \ldots$, und in jeder Spalte abwechselnd 20 und -20 bzw. 25 und -25 stehen. So entsteht das rechts abgebildete Rechteck. Die Summe aller Zahlen in diesem Rechteck ist -45.

−20	−25	20	25	−20	−25	20	25	−20	−25
20	25	−20	−25	20	25	−20	−25	20	25
−20	−25	20	25	−20	−25	20	25	−20	−25
20	25	−20	−25	20	25	−20	−25	20	25
−20	−25	20	25	−20	−25	20	25	−20	−25
20	25	−20	−25	20	25	−20	−25	20	25
−20	−25	20	25	−20	−25	20	25	−20	−25

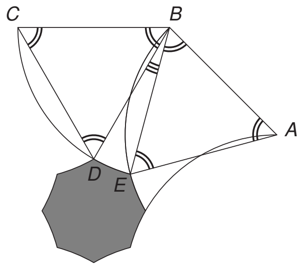
30. Peru

Die Abbildung zeigt ein regelmässiges Achteck mit der Seitenlänge 1 cm. Um jeden Eckpunkt wurde ein Bogen mit dem Radius 1 cm gezeichnet.
Wie gross ist der Umfang der grauen Fläche in cm?



(**A**) π (**B**) $\frac{2\pi}{3}$ (**C**) $\frac{8\pi}{9}$ (**D**) $\frac{4\pi}{5}$ (**E**) $\frac{3\pi}{4}$

Lösung: Da die Abbildung symmetrisch ist, reicht es, einen Abschnitt des Umfangs der grauen Fläche zu berechnen. Der Winkel *CBA* ist ein Innenwinkel des regelmässigen Achtecks und damit $\frac{8-2}{8} \cdot 180^\circ = 135^\circ$ gross. Da die Seitenlänge des Achtecks 1 cm beträgt und die Kreisbögen alle den Radius 1 cm haben, gilt $|AB| = |AE| = |BE| = 1$ cm und ebenso $|BC| = |BD| = |CD| = 1$ cm. Das bedeutet, dass die Dreiecke *ABE* und *BCD* gleichseitig sind. Folglich sind alle ihre Innenwinkel 60° gross. Nun können wir den Winkel *DBE* berechnen:



$\measuredangle DBE = \measuredangle CBA - \measuredangle CBD - \measuredangle EBA = 135^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 15^\circ$.

Der Kreisbogen von *D* zu *E* hat den Radius 1 cm und demzufolge die Länge $\frac{15^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1\,\text{cm} = \frac{\pi}{12}$ cm.

Der Umfang der grauen Fläche besteht aus 8 solchen Kreisbögen, er hat also die Länge $8 \cdot \frac{\pi}{12}\,\text{cm} = \frac{2\pi}{3}$ cm.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	E	B	A	B	E	B	C	A	E

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	C	B	D	D	D	A	B	E	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	A	C	B	C	D	B	E	A	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	B	E	C	D	B	C	D	A	A

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	B	E	C	E	A	B	D	D	C

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	B	C	B	A	C	E	C	E	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	A	D	C	D	B	E	B	D	C

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	E	D	E	B	C	A	B	E	A	E

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	B	D	D	B	C	E	B	A	B

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden:

Die Jahreszahl 2025 hat eine besondere Eigenschaft. Sie ist eine Quadratzahl, also das Produkt einer ganzen Zahl mit sich selbst. Die ersten Quadratzahlen sind 0, 1, 4, 9 und 16. Die Zahl 2025 ist gleich $45 \cdot 45$ oder 45^2, wie man kürzer schreibt.
Das nächste Mal ist die Jahreszahl im Jahr 46^2 eine Quadratzahl, also im Jahr 2116. Das ist in 91 Jahren. Nur wenige von uns werden ein zweites Mal ein Quadratzahljahr erleben.

Wer schafft es, auf der Vorderseite die drei magischen Quadrate zu vervollständigen?

Es sollen die Zahlen von 1 bis 9, von 1 bis 16 bzw. von 1 bis 25 vorkommen, und in jedem Quadrat sollen die Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen die gleiche Summe haben.