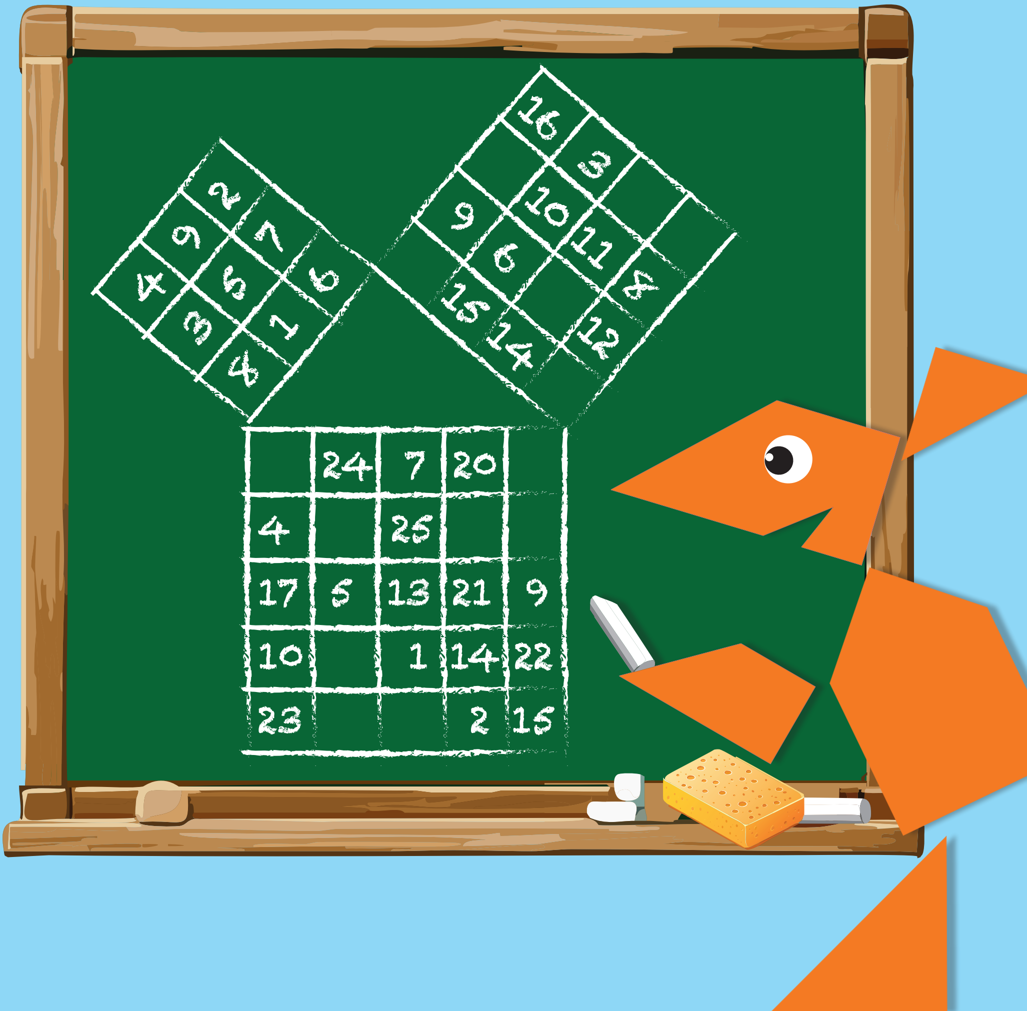
$(20+25)^2$

Mathe mit dem Känguru



Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmende am Wettbewerb *Känguru der Mathematik 2025*,

nach der ersten Durchführung am 20. März 2003, fand in diesem Jahr der Känguru-Wettbewerb in der Schweiz zum 23. Mal statt, wenn man das Coronajahr 2020 mitzählt, bei dem es den Schulen überlassen war, ob und wie sie den Wettbewerb durchführen. Wie schon letztes Jahr haben heuer mehr als 60 000 Schülerinnen und Schüler teilgenommen. Ein herzliches Dankeschön gilt den Koordinatoren und Koordinatorinnen der zugehörigen Schulen, die den Wettbewerb vor Ort organisiert haben, um mit uns gemeinsam die Lust auf Mathematik zu fördern. Wir hoffen, dass sich alle Teilnehmenden mit Freude mit den mathematischen Problemen beschäftigt und Lust auf weitere bekommen haben.

Zusammen mit der Schweiz haben sich Kinder und Jugendliche in mehr als 100 Ländern weltweit an den Aufgaben versucht. Im internationalen Verein *Kangourou sans frontières* arbeiten alle diese Länder zusammen. Die vielen hübschen oder ungewöhnlichen Fragestellungen sowie überhaupt die Vielgestaltigkeit der Aufgaben rühren daher, dass sehr unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus verschiedenen Kulturen einfliessen. In der Broschüre ist angegeben, aus welchen Ländern die Vorschläge für die Aufgaben kamen.

Känguru-Teilnehmerländer 2025

Es gab Fragestellungen zur Anordnung der Zahnputzbecher, zum Aufteilen einer Pizza oder der Fütterung im Streichelzoo. Auch eine Speisekarte, das Training einer Schwimmstaffel und ein Strauss aus Kleeblättern hielten ein mathematisches Problem bereit. Richtiges Rechnen war natürlich gefragt, aber vor allem kluges Denken. Gutes Vorstellungsvermögen, eine Portion Logik und geschicktes Kombinieren halfen, auch die härtesten Nüsse zu knacken. Das alles sind Fertigkeiten, die im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt werden und die uns im täglichen Leben helfen, Fragen und Problemen durch mathematisches Denken, logisches Schliessen und Strukturieren mit klugen Lösungen zu begegnen.

Känguru Schweiz hat auch dieses Jahr den Wettbewerb in Deutsch, Englisch, Französisch und Rhätoromanisch angeboten, wobei Letzteres sogar auf vier Idiome Vallader, Putèr, Sursilvan und neu Surmiran sowie dem übergeordneten *Rumantsch Grischun* erweitert wurde. Für die Übersetzungen und den online-Satz im Wettbewerbssystem danken wir herzlich unseren Helferinnen Mina Camenisch und Marie Haas sowie Loïc Cellier und Anne Garufo fürs Französisch, Sophie und Scott Goldie fürs Englisch und der Organisation *Lia Rumantscha* für alles Rhätoromanische.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger	Meike Akveld und Werner Durandi
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.	*Känguru Schweiz*

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von Martin Altmann, Deindra Hanzig, Dr. Monika Noack und Alexander Unger unter Mitwirkung von Dr. Meike Akveld, Maria Cannizzo, Sandra Czekay, Lukas Fischer, Bertram Hell, Ella, Birgit und Ulf Hutschenreiter, Dr. Marion Jarmer, Isabelle Kirner, Birgit Maier, Dr. Antje Noack, Nadine Rhyner, Angelika Rupflin, Solveg Schlinske, Andreas Stahel und Dr. Dorothea Vigerske erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V., www.mathe-kaenguru.de
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

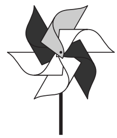
Organisation Schweiz: Verein *Känguru Schweiz*: www.kaenguru-schweiz.ch

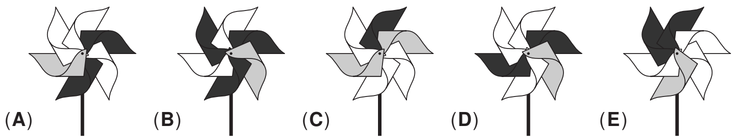
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 3 und 4

1. Selina lässt ihr Windrad drehen. Rechts ist es zu sehen.
Auf welchem der folgenden Bilder ist Selinas Windrad zu sehen?

Deutschland



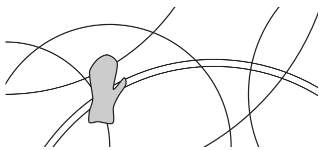


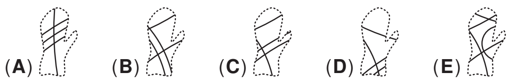
Lösung: Selinas Windrad hat zwei schwarze Flügel, die einander gegenüberliegen. Von den Windrädern in den Antwortmöglichkeiten hat nur (**D**) zwei schwarze Flügel, die einander gegenüberliegen. Und der eine graue Flügel in Selinas Windrad liegt hier auch im Uhrzeigersinn rechts von einem der schwarzen Flügel. Also ist (**D**) die Lösung.

— *Ähnlich, aber ein klein wenig kniffliger, waren in Klassenstufe 5/6 die Aufgabe 5 und in Klassenstufe 7/8 die Aufgabe 2.* —

2. Isabell hat auf der Eisbahn einen Handschuh verloren.
Wie verlaufen die Spuren unter dem Handschuh?

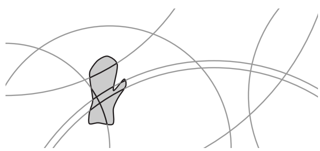
Iran





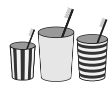
Lösung: Am besten ergänzen wir im Bild die Spuren dort, wo sie vom Handschuh verdeckt werden. So sehen wir schnell, dass (**C**) die Lösung ist.

— *Ähnlich war in Klassenstufe 5/6 die Aufgabe 3.* —

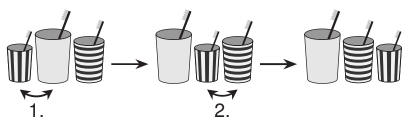


3. Im Bad stehen die Zahnputzbecher so, wie rechts zu sehen ist. Max tauscht erst den größten und den kleinsten Becher und anschließend die beiden gestreiften.
Wie stehen die Zahnputzbecher jetzt?

Polen



Lösung: Rechts ist zu sehen, wie Max die Zahnputzbecher tauscht. Am Ende stehen sie wie bei (**A**).



4. Simona will die vier Ziffern 2, 0, 2, 5 in die vier Kästchen schreiben und dann das Ergebnis ausrechnen.
Bei welcher Reihenfolge erhält sie das größte Ergebnis?

$\square + \square - \square + \square$

Deutschland

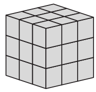
(**A**) 0, 2, 2, 5 (**B**) 0, 5, 2, 2 (**C**) 2, 5, 2, 0 (**D**) 5, 0, 2, 2 (**E**) 5, 2, 0, 2

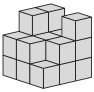
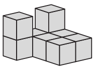
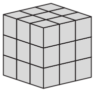
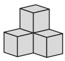
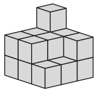
Lösung: Wir können für jede der fünf Reihenfolgen in den Antwortmöglichkeiten das Ergebnis der Rechnung berechnen: (**A**) $0+2-2+5=5$, (**B**) $0+5-2+2=5$, (**C**) $2+5-2+0=5$, (**D**) $5+0-2+2=5$, (**E**) $5+2-0+2=9$. Das größte Ergebnis ist 9, also ist (**E**) die Lösung.
Wer sich die Rechnung genau anschaut, braucht nicht zu rechnen. Nur die Zahl im dritten Kästchen wird abgezogen. Das Ergebnis der Rechnung ist somit am größten, wenn die Zahl im dritten Kästchen am kleinsten ist, also 0. Die Reihenfolge der anderen drei Zahlen spielt keine Rolle. Nur bei (**E**) steht 0 an der dritten Stelle, das ist die Lösung. – Das erklärt übrigens auch, warum das Ergebnis bei den anderen vier Reihenfolgen dasselbe ist, denn dort steht an der dritten Stelle jedes Mal dieselbe Ziffer.

— Ein ähnliches Problem, bei dem jedoch mit negativen Zahlen gerechnet werden muss, wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 3 gestellt. —

5. Lukas hat den Würfel rechts gebaut. Seine Schwester hat fotografiert, wie der Würfel entstanden ist. Sie hat nacheinander die 5 unten abgebildeten Fotos gemacht.
Welches Foto hat sie als 4. Foto gemacht?

Deutschland

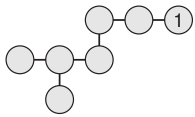


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Von Foto zu Foto sind immer mehr kleine Würfel darauf zu sehen. Also hat Lukas' Schwester die Fotos in der Reihenfolge (**D**)–(**B**)–(**E**)–(**A**)–(**C**) gemacht. Das vierte Foto ist bei (**A**) zu sehen.

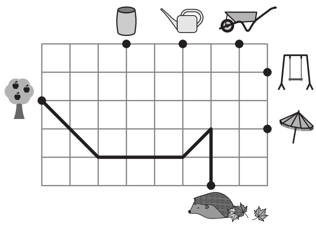
— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 5/6 die Aufgabe 1. —

Wer schafft es, in die leeren Kreise die Zahlen von 2 bis 7 so einzutragen, dass die Zahlen in jeder waagerechten und in jeder senkrechten Reihe dieselbe Summe haben?



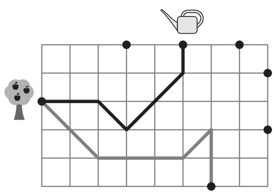
6. Igel Ingmar läuft vom Laubhaufen zum Apfelbaum nach der Regel 2↑ 1↙ 3← 2↖ (siehe Bild).
Vom Baum läuft er nach der Regel 2→ 1↘ 2↗ 1↑ weiter.
Wo kommt er an?

Slowakei



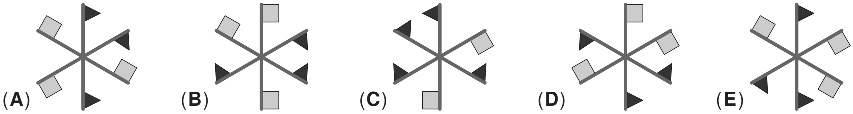
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Regeln geben vor, wie viele Schritte Igel Ingmar jeweils entlang der Seiten oder der Diagonalen der Kästchen geht. Wir zeichnen den Weg vom Apfelbaum aus in das Bild ein: 2 Schritte nach rechts, einen Schritt nach rechts unten, 2 Schritte nach rechts oben und einen Schritt nach oben. Igel Ingmar kommt bei der Gießkanne an.



7. Die drei abgebildeten Stäbe werden sternförmig übereinandergelegt. Wie könnte das aussehen?

Polen



Lösung: Wir wählen einen der Stäbe aus und schauen, bei welchen Antwortmöglichkeiten er zu finden ist. Den dritten Stab mit zwei Quadraten auf verschiedenen Seiten finden wir nur in (**D**) und (**E**). In (**D**) finden wir den zweiten Stab mit zwei Dreiecken auf der gleichen Seite nicht. Nur in (**E**) finden wir alle drei Stäbe, das ist die Lösung.

8. Vor mir liegen 5 Karten in einer Reihe: ♡ ◇ ✿ + ○ Ich nehme 2 der Karten weg und schiebe die restlichen zusammen, ohne die Reihenfolge zu ändern. Wie könnte die Kartenreihe nun aussehen?

Deutschland

(**A**) ♡ ○ ◇ (**B**) ✿ + ◇ (**C**) ◇ ○ ✿ (**D**) ♡ + ✿ (**E**) ◇ ✿ ○

Lösung: In der entstandenen Kartenreihe müssen die 3 Karten in derselben Reihenfolge liegen wie in der ursprünglichen Reihe. Das ist nur bei (**E**) der Fall: Die Raute ◇ liegt links von der Blume ✿, und diese liegt links vom Kreis ○. Also ist (**E**) die Lösung.
In den anderen Kartenreihen liegen immer mindestens 2 Karten in der falschen Reihenfolge: bei (**A**) ○ und ◇, bei (**B**) ✿ und ◇ sowie + und ◇, bei (**C**) ○ und ✿ und bei (**D**) + und ✿.

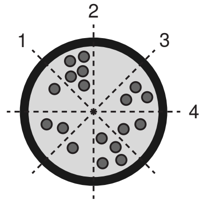
9. Emma, Mathilde und Cem haben Kekse in Känguru-Form gebacken. Ein paar haben sie schon verteilt, wie im Bild rechts. Nun sollen die restlichen 12 Kekse verteilt werden. Am Ende sollen alle gleich viele Kekse haben.
Wie viele von den 12 Keksen bekommt Emma?

Deutschland

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wir zählen zuerst, wie viele Kekse bereits verteilt sind. Emma hat schon 2 Kekse, Mathilde 3 und Cem 4. Wenn wir Mathilde noch 1 Keks geben und Emma 2, dann haben alle 3 Kinder gleich viele Kekse. Damit am Ende alle gleich viele Kekse haben, muss jedes Kind von den restlichen $12 - 1 - 2 = 9$ Keksen gleich viele bekommen, das heißt $9 : 3 = 3$. Emma bekommt von den 12 Keksen also $2 + 3 = 5$.
Wir können die Aufgabe auch lösen, indem wir zuerst ausrechnen, wie viele Kekse jedes Kind am Ende haben muss. Es sind insgesamt $2+3+4+12 = 21$ Kekse. Also muss am Ende jedes Kind $21 : 3 = 7$ Kekse haben. Da auf Emmas Teller schon 2 liegen, bekommt sie von den 12 restlichen Keksen $7 - 2 = 5$.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 4 zu lösen. —



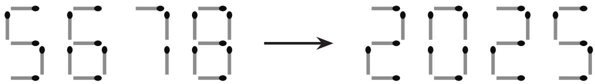
10. Julian teilt sich mit seinem Bruder eine Pizza. Er will sie entlang einer der Linien halbieren. Aber so, dass jeder gleich viele kleine Tomaten bekommt. Entlang welcher der Linien kann Julian teilen?

Norwegen

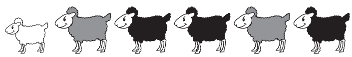
(**A**) 1 oder 4 (**B**) 1 oder 3 (**C**) 2 oder 4 (**D**) 2 oder 3 (**E**) 3 oder 4

Lösung: Wir zählen insgesamt 18 Tomaten auf der Pizza. Da die beiden Brüder gleich viele Tomaten bekommen sollen, muss jeder der beiden 18 : 2 = 9 Tomaten bekommen. Nun zählen wir für jede Linie die Tomaten auf einer der beiden Hälften. Auf der anderen Hälfte brauchen wir nicht zu zählen, denn hat der eine 9 Tomaten, dann hat auch der andere 9 Tomaten.
Links von Linie 1 liegen 8 Tomaten, links von Linie 2 sind es 9, links von Linie 3 sind es 8 und oberhalb von Linie 4 sind es 9. Die Pizza kann also entlang der Linien 2 und 4 wie gewünscht geteilt werden.

Wie viele Streichhölzer müssen in der Zahl 5678 umgelegt werden, sodass die Jahreszahl 2025 entsteht?



Wie viele Streichhölzer sind nötig, wenn wir die Zahl 5678 auf den Kopf stellen?
(Wo genau die Köpfe der Streichhölzer liegen, soll dabei keine Rolle spielen.)



11. Im Streichelzoo holt Annabella vom Futterautomaten Futter für die 6 Schafe. Es sind genau 210 Gramm. „Das kleinste Schaf muss noch wachsen“, meint Annabella. Sie gibt ihm doppelt so viel Futter wie jedem anderen Schaf. Wie viel Futter gibt Annabella dem kleinsten Schaf?

Deutschland

(**A**) 50 Gramm (**B**) 60 Gramm (**C**) 65 Gramm (**D**) 75 Gramm (**E**) 80 Gramm

Lösung: Das kleinste Schaf bekommt doppelt so viel Futter wie jedes andere Schaf. Also bekommt jedes der 5 großen Schafe eine gleich große Portion Futter und das kleinste Schaf 2 solche Portionen. Insgesamt sind das 7 gleich große Portionen und jede davon wiegt 210 g : 7 = 30 g. Das kleinste Schaf bekommt 2 solche Portionen, also $2 \cdot 30$ g = 60 g Futter.

12. Im Garten von Familie Dorn sind 2 weiße, 2 gelbe und 2 rote Rosen erblüht. Frau Dorn will 3 Rosen abschneiden und einen kleinen Strauß binden. Wie viele verschiedene Sträuße sind möglich?

Belarus

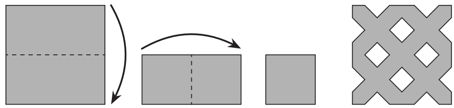
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

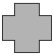
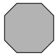
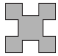
Lösung: In einem Strauß aus 3 dieser Rosen gibt es entweder jede Farbe genau einmal oder eine der drei Farben doppelt. Es gibt genau einen Strauß mit allen 3 Farben. Bei den Sträußen mit einer doppelten Farbe gibt es 3 Möglichkeiten für die doppelte Farbe – weiß, gelb oder rot – und jeweils 2 Möglichkeiten für die dritte Rose – gelb oder rot, weiß oder rot bzw. weiß oder gelb. Das sind $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6$ Sträuße mit einer doppelten Farbe. Insgesamt sind also 1 + 6 = 7 Sträuße möglich.
Die möglichen 7 Sträuße lassen sich auch gut durch systematisches Aufschreiben finden, dabei stehen w für weiss, g für gelb und r für rot, die Reihenfolge der Farben spielt keine Rolle:

w r g	w w g	g g w	r r w
	w w r	g g r	r r g

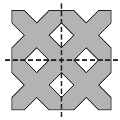
13. Milo faltet ein quadratisches Blatt Papier zuerst nach unten und dann nach rechts. Dann schneidet er am Rand Stücke ab. Wenn er das Blatt wieder auseinanderfaltet, erhält er das rechts abgebildete Deckchen.
Wie hat Milo das gefaltete Papier geschnitten?

Slowakei



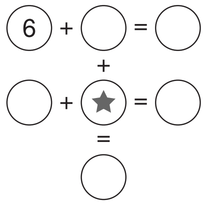
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Lösung können wir finden, indem wir in das fertige Deckchen die Linien einzeichnen, an denen Milo gefaltet hat. Das Teil rechts unten zeigt das Blatt Papier, wie es nach dem Schneiden und vor dem Auseinanderfalten ausgesehen hat. Das ist bei (**B**) zu sehen, so hat Milo das gefaltete Papier geschnitten.



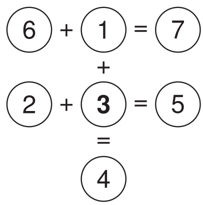
14. Die sieben Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sollen so in die sieben Kreise geschrieben werden, dass die drei Rechnungen richtig sind.
Die 6 ist bereits eingetragen.
Welche Zahl gehört in den Kreis mit dem Stern ★ ?

China

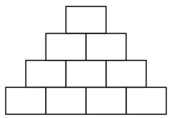


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 7

Lösung: Da nur die Zahlen von 1 bis 7 zu verteilen sind, muss in der waagerechten Rechnung oben als Ergebnis die 7 und im mittleren Kreis die 1 stehen. Wir überlegen, welche der verbleibenden Zahlen 2, 3, 4, 5 in die waagerechte Rechnung in der Mitte gehören. Die Summe ist mindestens 2 + 3 = 5. Da nur die Zahlen 2, 3, 4, 5 zur Verfügung stehen, ist klar, dass die Summe 5 ist und die Summanden 2 und 3 sind. Übrig ist noch die 4, diese gehört folglich in den Kreis unten. Die senkrechte Rechnung ist also 1 + **3** = 4, das heisst, in den Kreis mit dem Stern gehört die 3.

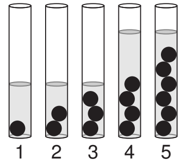


Mia möchte die abgebildete Pyramide ausmalen:
4 Felder rot, 3 Felder blau, 2 Felder gelb und 1 Feld orange.
Felder, die sich berühren, sollen verschiedene Farben haben.
Wie viele Möglichkeiten hat Mia, die Pyramide so auszumalen?



Lösungen der Zusatzaufgaben von Seite 10

19: D 20: E 21: E 22: B 23: D 24: D



15. Russland

In fünf Gefässen befinden sich lauter gleich grosse Murmeln und Wasser. In den ersten drei Gefässen steht das Wasser gleich hoch, in den beiden anderen steht es doppelt so hoch.
Welches Gefäss enthält am wenigsten Wasser?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: In den Gefässen 1, 2 und 3 steht das Wasser gleich hoch. Von diesen Gefässen enthält das Gefäss 3 die meisten Kugeln und folglich am wenigsten Wasser. Genauso verhält es sich mit den Gefässen 4 und 5. Von diesen enthält das Gefäss 5 mehr Kugeln und folglich weniger Wasser.
Nun müssen wir noch die Gefässe 3 und 5 vergleichen. Das Wasser steht in Gefäss 5 genau doppelt so hoch wie in Gefäss 3 und auch die Anzahl an Kugeln ist genau doppelt so gross. Also enthält Gefäss 5 genau den doppelten Inhalt wie Gefäss 3. Das kann man sich ganz gut so vorstellen: Hätte man Gefäss 3 zweimal, erhielte man durch Zusammenschütten genau Gefäss 5. Also enthält Gefäss 5 genau doppelt so viel Wasser wie Gefäss 3, und das Gefäss mit dem wenigstens Wasser ist folglich Gefäss 3.

16. Iran

Larissa hat in einer Schatulle 50 Knöpfe. Es gibt weisse, rote und blaue. Weisse Knöpfe sind es 11-mal so viele wie blaue. Rote Knöpfe gibt es mehr als blaue, aber weniger als weisse. Wie viele rote Knöpfe sind es?

(**A**) 2 (**B**) 8 (**C**) 14 (**D**) 18 (**E**) 26

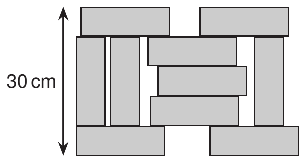
Lösung: Wir überlegen, wie viele Knöpfe Larissa von jeder Sorte haben könnte, und nutzen dazu eine Tabelle. Dabei beginnen wir mit der Anzahl der blauen Knöpfe.

blau	weiss	rot	weiss > rot > blau ?
1	11 (= $11 \cdot 1$)	38 (= $50 - 1 - 11$)	nein
2	22 (= $11 \cdot 2$)	26 (= $50 - 2 - 22$)	nein
3	33 (= $11 \cdot 3$)	14 (= $50 - 3 - 33$)	ja
4	44 (= $11 \cdot 4$)	2 (= $50 - 4 - 44$)	nein

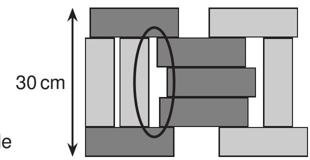
Es können nicht mehr als 4 blaue Knöpfe sein, denn dann wären es wegen $11 \cdot 5 = 55$ schon mehr als 50 weisse Knöpfe, also zu viele. Da es nur in der dritten Zeile mehr rote Knöpfe als blaue und weniger als weisse sind, hat Larissa 3 blaue, 33 weisse und 14 rote Knöpfe.

17. Griechenland

Zehn gleiche Bausteine  wurden aufeinandergestellt. Das Bild rechts zeigt die Ansicht von vorn.
Wie lang ist die längste Kante eines solchen Bausteins?



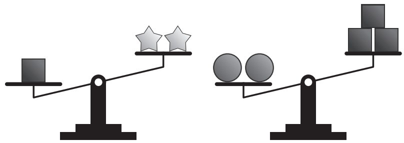
(**A**) 18 cm (**B**) 19 cm (**C**) 20 cm (**D**) 21 cm (**E**) 22 cm



Lösung: Wir schauen uns das Bauwerk aufmerksam an. Die 5 dunkel gefärbten Bausteine sind zusammen genauso hoch wie das gesamte Bauwerk, also 30 cm. Folglich ist die kurze sichtbare Kante eines solchen Bausteins 30 cm : 5 = 6 cm lang. Ausserdem erkennen wir, dass die drei dunklen Bausteine, die in der Mitte waagerecht liegen, zusammen genauso hoch sind wie der senkrecht stehende Baustein links daneben. Rechts ist diese Stelle eingekreist. Also ist die längste Kante eines solchen Bausteins $3 \cdot 6$ cm = 18 cm lang.
Wenn wir die Länge der kurzen Kante schon kennen, können wir die Länge der längsten Kante auch anders berechnen: Das Bauwerk ist so hoch wie zwei kurze und eine lange Kante. Also ist die längste Kante eines solchen Bausteins 30 cm $-$ $2 \cdot 6$ cm = 18 cm lang.

18. China

Am Eingang einer magischen Höhle sitzt ein Wächter. Vor ihm stehen zwei Balkenwaagen mit glänzenden Objekten darauf: Kugeln, Würfel und Sterne. „Willst du eintreten, musst du mir das Gewicht der Würfel nennen“, tönt seine Stimme. „Jedes Objekt ist entweder 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg oder 5 kg schwer.
Bedenke: Objekte gleicher Form sind gleich schwer.“
Wie viel wiegt ein Würfel?



(**A**) 1 kg
(**B**) 2 kg
(**C**) 3 kg
(**D**) 4 kg
(**E**) 5 kg

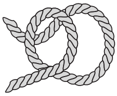
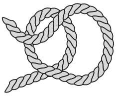
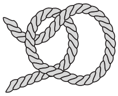
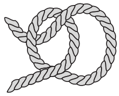
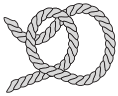
Lösung: An der linken Waage lesen wir ab, dass ein Würfel schwerer ist als zwei Sterne. Da ein Stern mindestens 1 kg wiegt, liegen auf der leichteren Waagschale also mindestens $2 \cdot 1\,\text{kg} = 2\,\text{kg}$. Ein Würfel wiegt demzufolge mindestens 3 kg.
An der rechten Waage lesen wir ab, dass drei Würfel leichter sind als zwei Kugeln. Da eine Kugel höchstens 5 kg wiegt, liegen auf der schwereren Waagschale also höchstens $2 \cdot 5\,\text{kg} = 10\,\text{kg}$. Die drei Würfel wiegen demzufolge höchstens 9 kg und ein einzelner Würfel somit höchstens $9\,\text{kg} : 3 = 3\,\text{kg}$.
Wir haben gezeigt, dass ein Würfel mindestens 3 kg und höchstens 3 kg wiegt. Folglich wiegt ein Würfel genau 3 kg.
Daraus, dass ein Würfel 3 kg wiegt, können wir übrigens noch schliessen, dass ein Stern 1 kg wiegen muss und eine Kugel 5 kg.

Hast du Lust auf 6 Zusatzaufgaben? Dann pack' diese hier noch an!

---

19. Bei welchem Seil erhalten wir einen Knoten, wenn wir an den beiden Enden ziehen?

Russland

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

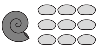
20. Ben würfelt mit 5 Spielwürfeln insgesamt 18 Augen. Ein Würfel zeigt eine 1, und ein Würfel zeigt eine 2. Die anderen 3 Würfel zeigen alle dieselbe Augenzahl. Welche?

Norwegen

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

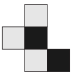
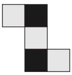
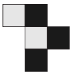
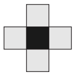
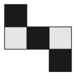
21. In ihrem Kaufladen bezahlen Samuel und Alina mit Schneckenhäusern und Steinchen. Ein Schneckenhaus hat den Wert 6 und ein Steinchen den Wert 1.
Samuels voller Einkaufskorb hat den Wert 16. Wie könnte Samuel passend bezahlen?

Deutschland

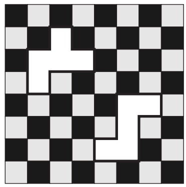
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

22. Welche beiden Teile wurden aus dem Schachbrett ausgeschnitten?

Spanien

1 2 3 4 5

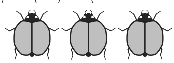


(**A**) 1 und 2 (**B**) 1 und 5 (**C**) 3 und 4 (**D**) 3 und 5 (**E**) 4 und 5

23. Zur Verschönerung ihres Klassenraums basteln die Kinder 12 Marienkäfer. Zum Schluss kleben sie die Punkte auf. Immer 2 Käfer sollen gleich viele Punkte haben.

Griechenland

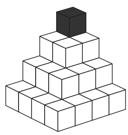
Es sind 9 Käfer fertig: 

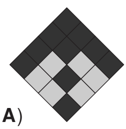
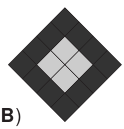
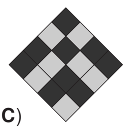
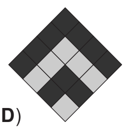
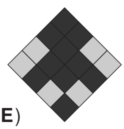
Wie viele Punkte werden für die letzten 3 Käfer insgesamt gebraucht? 

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

24. Mit schwarzen und grauen Würfeln wird die abgebildete Würfelpyramide gebaut. Würfel, die sich mit einer Seitenfläche berühren, sollen verschiedene Farben haben. Ganz oben soll ein schwarzer Würfel sein.
Wie sieht die fertige Pyramide von oben aus?

Polen



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

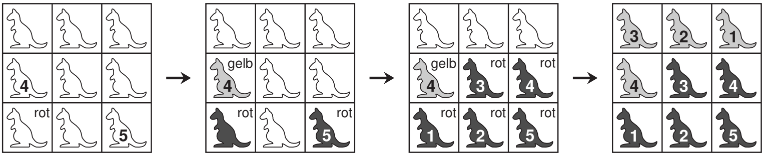
Die Antwortbuchstaben dazu findest du auf Seite 7 unten.

Bunte Känguru-Schlangen

In den abgebildeten Gittern soll jedes Känguru mit einer Farbe ausgemalt und mit einer Zahl beschriftet werden. Neben jedem Gitter ist angegeben, welche Farben und welche Zahlen je Farbe vorkommen. In einigen Feldern ist die Zahl und/oder die Farbe vorgegeben. Kängurus, die dieselbe Farbe haben und deren Zahlen aufeinander folgen, befinden sich in senkrecht oder waagerecht benachbarten Feldern. Für jede Farbe stehen die Kängurus also der Reihe nach in einer „Schlange“, die 1 ist neben der 2, auf die 2 folgt die 3 und so weiter.

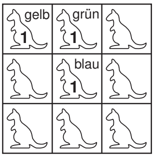
Im folgenden Beispiel bedeutet der Hinweis „gelb 1–4, rot 1–5“, dass es gelbe Kängurus mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 sowie rote Kängurus mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 gibt.

gelb 1–4
rot 1–5

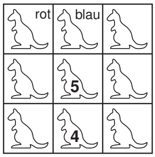


Wer findet alle Känguru-Schlangen?

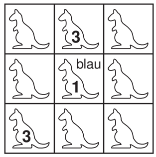
gelb 1–3
grün 1–3
blau 1–3



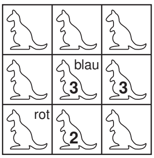
rot 1–4
blau 1–5



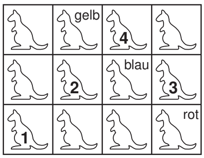
rot 1–6
blau 1–3



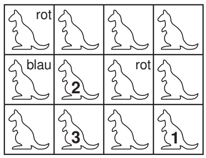
gelb 1–4
rot 1–2
blau 1–3



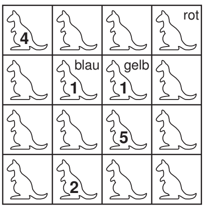
rot 1–3
gelb 1–4
blau 1–5



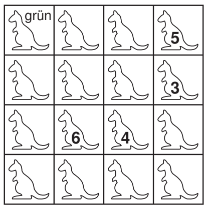
rot 1–4
blau 1–4
grün 1–4



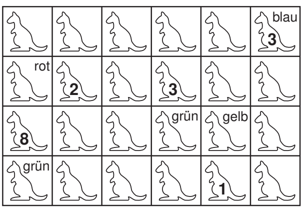
rot 1–4
gelb 1–3
blau 1–5
grün 1–4



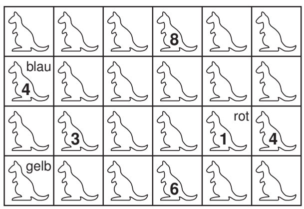
gelb 1–7
rot 1–4
grün 1–5



grün 1–8
blau 1–6
gelb 1–6
rot 1–4

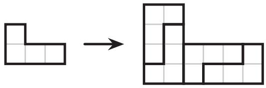


blau 1–6
rot 1–9
gelb 1–9

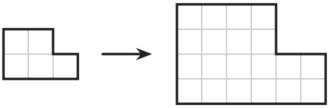


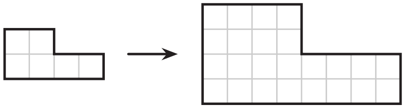
Vergrösserung gesucht

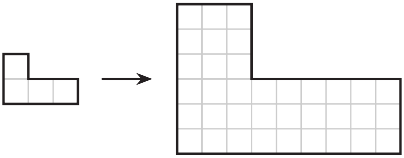
Mehrere Teile einer vorgegebenen Form sollen so zusammengelegt werden, dass eine Figur derselben Form in einer vergrösserten Version entsteht. Jedes einzelne Teil darf dafür beliebig gedreht und gewendet werden. Rechts ist ein Beispiel abgebildet.

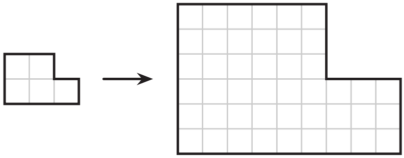


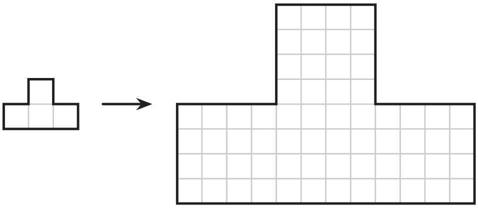
Wer kann mit Teilen der vorgegebenen Form jeweils die angegebene vergrösserte Figur bilden?





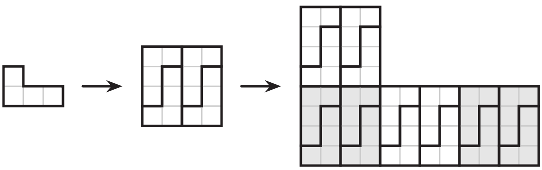




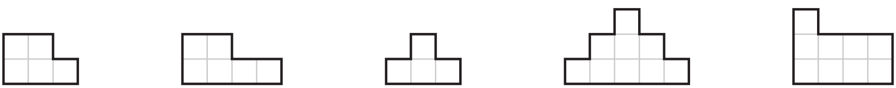


Quadrate als Zwischenschritt

Wenn es möglich ist, Teile der vorgegebenen Form zu einem Quadrat zusammenzulegen, können wir anschliessend jedes kleine Teilquadrat des gegebenen Teils durch dieses Quadrat „ersetzen“ und erhalten so eine vergrösserte Version des vorgegebenen Teils. Hier ist ein Beispiel:



Wer kann aus mehreren Teilen der angegebenen Formen jeweils ein Quadrat bilden?
Aus wie vielen Teilen besteht jeweils das kleinste Quadrat, das gebildet werden kann?
Und aus wie vielen Teilen besteht dann jeweils die vergrösserte Version dieses Teils?



Magische Quadrate

Magische Quadrate faszinieren Menschen seit jeher. Das älteste bekannte magische Quadrat stammt aus China und ist über 4000 Jahre alt. Einer Legende nach befand es sich auf dem Panzer einer Schildkröte. Ein magisches Quadrat ist ein Zahlenquadrat, in dem die Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen dieselbe „magische“ Summe haben. Bestimmt hast du vorn auf der Broschüre die drei magischen Quadrate zum Ausfüllen entdeckt. Auf der Rückseite steht eine Erklärung dazu.

Wer schafft es, die folgenden magischen Quadrate fertig auszufüllen?
Wie groß ist jeweils die magische Summe?

Zahlen von 1 bis 9:

4	3	8
	5	
		6

Zahlen von 2 bis 10:

7		9
3	10	5

Zahlen von 4 bis 12:

5	10	
	8	
		11

gerade Zahlen von 2 bis 18:

14	10	6
	2	

ungerade Zahlen von 1 bis 17:

11	13	
1		
15		

Zahlen von 8 bis 16:

		10
13		15

In den folgenden Quadraten sollen die Zahlen von 1 bis 25 stehen. Das 3×3-Quadrat in der Mitte soll ein magisches Quadrat mit den Zahlen von 9 bis 17 sein. In den äußeren Ring gehören die Zahlen von 1 bis 8 und von 18 bis 25, sodass auch das große 5×5-Quadrat ein magisches Quadrat ist.

4	1	21	19	20
	16	11	12	
		13	17	3
8				

21	8		23	
22		17		
1				
	14	9	16	
19		20		5

Wer kann die folgenden magischen Quadrate mit den Zahlen von 1 bis 16 ausfüllen? Welche magische Summe haben sie? Und wer entdeckt beim zweiten und dritten magischen Quadrat weitere Eigenschaften?

9			8
6	7		
	12	5	2
	1		13

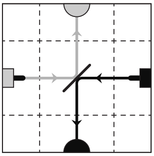
1		8	12
	16		
14	2	11	7
15			

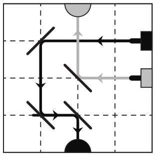
6	9		15
3			10
	2		8
12		14	

Gespiegelte Laserstrahlen

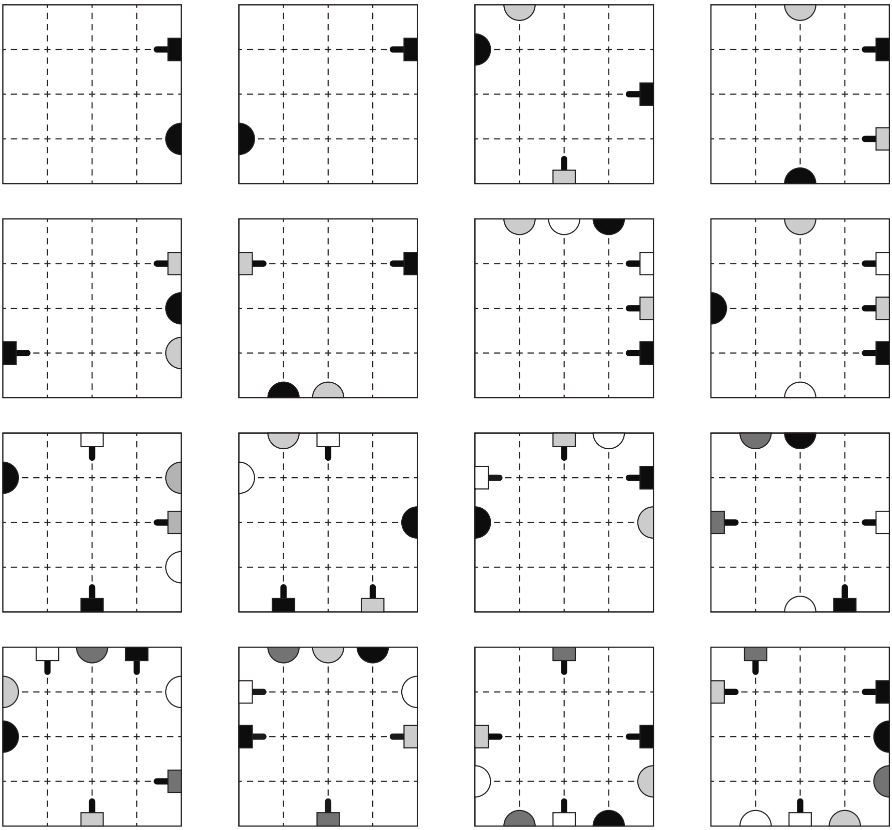
In jedem der folgenden Gitter sollen Laserstrahlen entlang der gestrichelten Linien eingezeichnet werden. Jeder Laserstrahl geht von einem Laser aus und soll beim entsprechenden Empfänger der gleichen Farbe ankommen. Um die Laserstrahlen zum Empfänger zu lenken, müssen diagonal auf geeigneten Kreuzungspunkten doppelseitige Spiegel platziert werden. Auf ihren Wegen dürfen sich die Laserstrahlen kreuzen.

Hier sind zwei Beispiele:





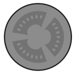
Wer kann in jedem Gitter doppelseitige Spiegel so auf den Kreuzungen platzieren, dass alle Laserstrahlen beim richtigen Empfänger ankommen? Oft gibt es mehrere verschiedene Lösungen.



Klassenstufen 5 und 6

1. Emil belegt eine Pizza. Er verteilt die Zutaten Sorte für Sorte, eine nach der anderen. Die fertige Pizza ist rechts zu sehen.
Welche Zutat hat Emil als letztes verteilt?

Deutschland

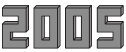
(**A**) Zwiebelringe  (**B**) Tomatenscheiben 
(**C**) schwarze Oliven  (**D**) Champignons 
(**E**) Chilischoten 

Lösung: Alle Teile der gesuchten Zutat liegen ganz oben, sind also nicht von einer anderen Zutat bedeckt. Das trifft nur auf die Chilischoten zu, diese hat Emil als letztes auf die Pizza gelegt.

— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 3/4 die Aufgabe 5. —

2. Zum Stadtfest wurde auf dem Stadttor mit grossen Ziffern die Jahreszahl aufgebaut. Was ist von der anderen Seite zu sehen?

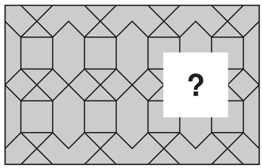
Dänemark

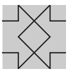
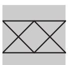
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Von der anderen Seite aus gesehen, stehen die Ziffern in der umgekehrten Reihenfolge, also 5, 2, 0, 2. Die 2 sieht von hinten aus wie eine 5 und die 5 wie eine 2. Die 0 sieht von beiden Seiten gleich aus. Folglich ist von der anderen Seite 2, 5, 0, 5 zu sehen, so wie es bei (**B**) angegeben ist.

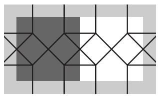
3. Welches der abgebildeten Teile passt in das Muster?

Iran



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

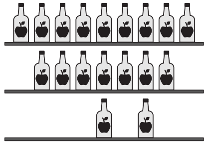
Lösung: Wie das fehlende Teil aussieht, ist im Muster direkt links neben dem weissen Quadrat mit dem Fragezeichen zu erkennen. Das gesuchte Teil ist (**D**).



— Ähnlich war in Klassenstufe 3/4 die Aufgabe 2. —

4. Im Regal mit dem selbstgepressten Apfelsaft sollen auf jedem der drei Bretter gleich viele Flaschen stehen. Dafür müssen einige Flaschen vom oberen und vom mittleren Brett auf das untere Brett gestellt werden.
Wie viele Flaschen müssen <u>vom mittleren</u> Brett genommen werden?

Hongkong



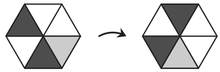
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Auf dem oberen Brett stehen 9 Flaschen, auf dem mittleren Brett 7 Flaschen und auf dem unteren Brett 2 Flaschen. Insgesamt sind das $9 + 7 + 2 = 18$ Flaschen. Am Ende sollen auf jedem der drei Bretter gleich viele Flaschen stehen, also $18 : 3 = 6$ Flaschen. Vom mittleren Brett muss wegen $7 - 6 = 1$ eine Flasche genommen werden.
Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir Flaschen auf dem oberen und mittleren Brett durchstreichen und auf dem unteren Brett dazumalen.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 13 zu lösen. —

5. Deutschland

Maja dreht ein sechseckiges Blatt Papier schrittweise immer ein Feld im Uhrzeigersinn. Die Ausgangslage und die Lage nach dem 1. Schritt sind rechts abgebildet. Wie sieht das Blatt nach dem 8. Schritt aus?


Start   nach dem 1. Schritt

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Das 6-eckige Blatt liegt nach dem 6. Schritt wieder in der Ausgangslage. Also liegt es nach 8 Schritten so wie nach $8 - 6 = 2$ Schritten. Für die Lösung müssen wir das Blatt nach dem 1. Schritt nur noch einen Schritt weiterdrehen. Dann liegt das Blatt wie bei (**A**).

— Ähnliche Aufgaben waren in Klassenstufe 3/4 die Aufgabe 1 und in Klassenstufe 7/8 die Aufgabe 2. —

6. Deutschland

Vor meinem Lieblings-Burger-Restaurant steht eine Tafel mit der Speisekarte. Der Regen hat einige der Zahlen weggewaschen. Die Burger sind nach ihrem Preis geordnet.
Welcher der folgenden Preise ist der Preis für einen der Burger?

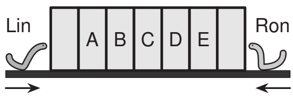
(**A**) 4,60 (**B**) 4,80 (**C**) 5,30 (**D**) 5,80 (**E**) 6,30

Lösung: Der Burger *Klassisch* kostet mehr als die 3,70, die der Burger *Veggie* kostet. Der Burger *Klassisch* kostet also mindestens 4,30. Der Burger *Bacon* kostet mehr als der Burger *Klassisch*, also mindestens 4,80. Der Burger *Viel Käse* kostet mehr als der Burger *Bacon*, also mindestens 5,60.
Wäre einer dieser Burger teurer, so würde der Burger *Viel Käse* mindestens 6,60, und damit mehr als der Burger *Spezial* kosten.
Die Preise für die drei mittleren Burger sind folglich 4,30, 4,80 und 5,60, und somit ist (**B**) die Lösung.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 7 gestellt. —

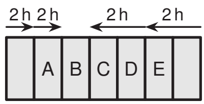
7. Schweiz

Bücherwurm Lin frisst sich in 2 Stunden durch 1 Buch.
Bücherwurm Ron benötigt für 1 Buch nur 1 Stunde.
Sie beginnen gleichzeitig zu fressen.
In einem der Bücher treffen sie sich. In welchem?



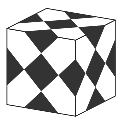
(**A**) in A (**B**) in B (**C**) in C (**D**) in D (**E**) in E

Lösung: Nach 2 Stunden hat sich Lin durch das Buch ganz links gefressen. Ron hat sich in dieser Zeit durch 2 Bücher gefressen, also durch das Buch ganz rechts und das Buch E.
Nach weiteren 2 Stunden hat sich Lin durch das Buch A gefressen. Ron hat sich in dieser Zeit durch die 2 Bücher D und C gefressen. Nun fangen beide an, sich durch das Buch B zu fressen, also müssen sie sich in diesem Buch treffen.



8. Slowakei

Auf einen Würfel wurden quadratische schwarze Aufkleber geklebt: einer auf jede Kante und einer in die Mitte jeder Seite. Alle Seiten des Würfels sehen gleich aus.
Wie viele Aufkleber wurden insgesamt verwendet?

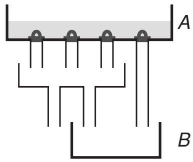


(**A**) 24 (**B**) 20 (**C**) 18 (**D**) 16 (**E**) 14

Lösung: Auf jede Kante und jede Seitenfläche wird ein Aufkleber geklebt. Da jeder Würfel 12 Kanten und 6 Seitenflächen hat, wurden insgesamt $12 + 6 = 18$ Aufkleber verwendet.
Eine andere Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, besteht darin, sich eine Seitenfläche genauer anzusehen. Auf jeder Seitenfläche kleben 1 ganzer und 4 halbe Aufkleber. Das ist so viel wie 3 ganze Aufkleber. Da der Würfel 6 Seitenflächen hat, wurden insgesamt $6 \cdot 3 = 18$ Aufkleber verwendet.

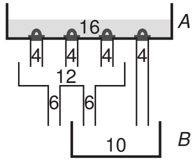
9. Im Behälter *A* befinden sich 16 Liter Wasser. Die vier Stöpsel im Behälter *A* werden gleichzeitig herausgezogen und das Wasser fliesst gleichmässig ab. Wie viel Wasser kommt so insgesamt im Behälter *B* an?

Schweiz



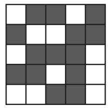
(**A**) 9 Liter (**B**) 10 Liter (**C**) 11 Liter (**D**) 12 Liter (**E**) 13 Liter

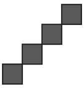
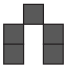
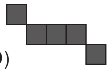
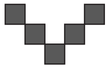
Lösung: Da das Wasser gleichmässig abfliesst, laufen im Behälter *A* durch jeden der 4 Abflüsse 16 : 4 = 4 Liter Wasser. Davon landen 3 · 4 = 12 Liter links im Zwischenbecken und 4 Liter direkt im Behälter *B*. Durch jeden der 2 Abflüsse im Zwischenbecken laufen 12 : 2 = 6 Liter Wasser. Insgesamt kommen also 4 + 6 = 10 Liter Wasser im Behälter *B* an.



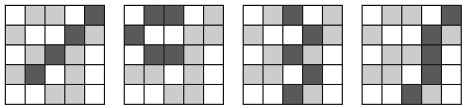
10. Vier der folgenden fünf Figuren sind so oder gedreht im Bild rechts zu finden. Welche Figur kann dort <u>nicht</u> gefunden werden?

Deutschland



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Im Bild rechts ist jeweils eine Stelle zu sehen, wo die Figuren (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) gefunden werden können.



Die Figur (**E**) kann nicht gefunden werden, denn auf keiner der schrägen Linien, die von links oben nach rechts unten verlaufen, liegen drei dunkle Felder direkt hintereinander.

— Eine ähnliche Aufgabe war in Klassenstufe 3/4 die Aufgabe 11. —

11. Die fünf besten Schwimmer meiner Schule trainieren für einen Staffel-Wettkampf. Sie schwimmen direkt nacheinander dieselbe Strecke. Die Trainerin stoppt bei den Wechseln die Zwischenzeiten.

Deutschland

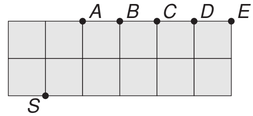
Genau 10 Minuten und 3 Sekunden nach dem Start beendet der fünfte Schwimmer seine Strecke. Welcher Schwimmer benötigte für seine Strecke die wenigste Zeit?

(**A**) der erste (**B**) der zweite (**C**) der dritte (**D**) der vierte (**E**) der fünfte

Lösung: Der erste Schwimmer hat für seine Strecke so viel Zeit benötigt, wie es die erste Zwischenzeit angibt, nämlich 2 Minuten und 8 Sekunden. Der zweite Schwimmer hat für seine Strecke so viel Zeit benötigt, wie der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Zwischenzeit beträgt. Er hat 1 Sekunde weniger als 2 Minuten benötigt, also 1 Minute und 59 Sekunden. Genauso berechnen wir, wie lange die anderen Schwimmer gebraucht haben. Der dritte Schwimmer hat 2 Minuten und 3 Sekunden benötigt. Der vierte Schwimmer hat 5 Sekunden weniger als 2 Minuten benötigt, also 1 Minute und 55 Sekunden. Und der fünfte Schwimmer hat 2 Sekunden weniger als 2 Minuten benötigt, also 1 Minute und 58 Sekunden. Somit hat der vierte Schwimmer für seine Strecke die wenigste Zeit benötigt.

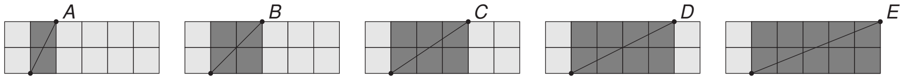
12. Die abgebildete Figur besteht aus gleich grossen Quadraten. Sie soll durch einen geraden Schnitt durch den Punkt S in zwei Teile mit dem gleichen Flächeninhalt zerschnitten werden.
Durch welchen Punkt verläuft dieser Schnitt noch?

Türkei



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

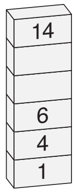
Lösung: Die Bilder zeigen die 5 möglichen Schnitte. Das Rechteck, das zwischen den beiden markierten Punkten liegt, ist jeweils dunkelgrau gefärbt.



In jedem Bild verläuft der Schnitt entlang einer Diagonalen des jeweiligen dunkelgrauen Rechtecks. Das dunkelgraue Rechteck wird also jeweils in zwei Teile geteilt, die jeweils dieselbe Form und somit den gleichen Flächeninhalt haben. Damit die gesamte Figur durch den Schnitt in zwei Teile mit dem gleichen Flächeninhalt zerschnitten wird, müssen die hellgrauen Rechtecke links und rechts vom dunkelgrauen Rechteck den gleichen Flächeninhalt haben. Das ist nur bei (**D**) der Fall.

13. Ali hat einen Turm aus Bauklötzen gebaut. Nun schreibt er auf jeden Klotz eine Zahl. Jede Zahl im Turm soll um <u>mindestens</u> 2 grösser sein als die Zahl direkt darunter.
Auf wie viele Arten kann Ali die beiden leeren Klötze beschriften?

Deutschland

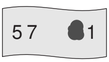


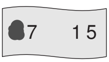
(**A**) 7 (**B**) 6 (**C**) 5 (**D**) 4 (**E**) 3

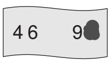
Lösung: Die Zahl auf dem unteren leeren Klotz muss um mindestens 2 grösser sein als 6, also mindestens 8. Die Zahl auf dem oberen leeren Klotz muss um mindestens 2 kleiner sein als 14, also höchstens 12. Ausserdem muss die Zahl auf dem oberen leeren Klotz um mindestens 2 grösser sein als die Zahl auf dem unteren leeren Klotz.
Schreibt Ali 8 auf den unteren Klotz, dann kann er entweder 10, 11 oder 12 auf den oberen Klotz schreiben.
Schreibt Ali 9 auf den unteren Klotz, dann kann er entweder 11 oder 12 auf den oberen Klotz schreiben.
Schreibt Ali 10 auf den unteren Klotz, dann muss er 12 auf den oberen Klotz schreiben.
Eine Zahl grösser als 10 darf Ali nicht auf den unteren Klotz schreiben, da er dann den oberen Klotz nicht wie gefordert beschriften kann.
Insgesamt gibt es 6 Möglichkeiten, wie Ali die beiden leeren Klötze beschriften kann.

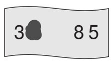
14. Auf jedem der folgenden Zettel stehen zwei 2-stellige Zahlen. Eine Ziffer ist jeweils durch einen Tintenklecks verdeckt. Nur auf einem Zettel ist die Summe der Ziffern der linken Zahl gleich der Summe der Ziffern der rechten Zahl. Welcher Zettel ist das?

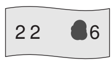
Griechenland

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: Bei (**A**) hat die vollständig sichtbare Zahl die Quersumme $5 + 7 = 12$. Die Quersumme der anderen Zahl liegt aber zwischen $1 + 1 = 2$ und $9 + 1 = 10$, dieser Zettel ist nicht der gesuchte.
Bei (**B**) hat die vollständig sichtbare Zahl die Quersumme $1 + 5 = 6$. Die Quersumme der anderen Zahl liegt aber zwischen $1 + 7 = 8$ und $9 + 7 = 16$.
Bei (**C**) hat die vollständig sichtbare Zahl die Quersumme $4 + 6 = 10$. Die andere Zahl kann auch die Quersumme 10 haben, und zwar wenn sie 91 lautet. Damit ist (**C**) der gesuchte Zettel.
Auf den Zetteln (**D**) und (**E**) hat die linke Zahl jeweils eine kleinere Quersumme als die rechte Zahl.

15. Zwei Schildkröten laufen 40 m um die Wette. Jede läuft mit konstanter Geschwindigkeit. Als die erste Schildkröte 10 m zurückgelegt hat, hat die zweite erst 7 m geschafft. Wie weit ist die zweite Schildkröte noch von der Ziellinie entfernt, wenn die erste Schildkröte ins Ziel kommt?

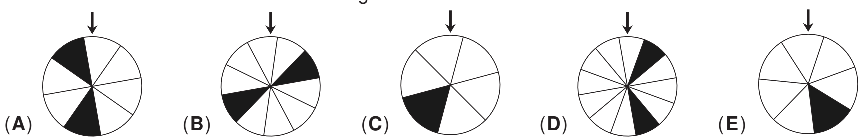
Russland

(**A**) 8 m (**B**) 9 m (**C**) 10 m (**D**) 12 m (**E**) 15 m

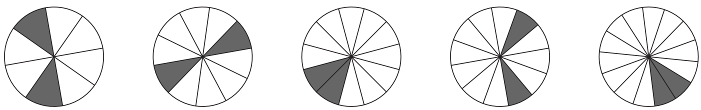
Lösung: Immer wenn die erste Schildkröte 10 m zurücklegt, legt die zweite Schildkröte 7 m zurück. Die zweite Schildkröte fällt dabei um 10 m − 7 m = 3 m zurück. Auf den gesamten 40 m der Rennstrecke fällt wegen 4 · 10 m = 40 m die zweite Schildkröte insgesamt 4 · 3 m = 12 m zurück. Die zweite Schildkröte ist also 12 m von der Ziellinie entfernt, wenn die erste Schildkröte ins Ziel kommt.

16. Die folgenden Glücksräder sind jeweils in gleich grosse Teile unterteilt. Um zu gewinnen, muss das Rad nach dem Drehen so anhalten, dass der Pfeil auf ein schwarzes Feld zeigt.
Bei welchem Rad ist die Gewinnchance am grössten?

Norwegen



Lösung: Die Gewinnchance ist bei dem Rad am grössten, bei dem der Anteil der schwarzen Felder an der Gesamtzahl der Felder am grössten ist. Um die Räder besser vergleichen zu können, halbieren wir bei (**C**) und (**E**) jedes Feld.



Dann ist immer noch jedes Rad in gleich grosse Teile unterteilt, wobei jedes Rad genau 2 schwarze Felder besitzt. Der Anteil der 2 schwarzen Felder ist bei dem Rad am grössten, das die wenigsten Felder hat. Bei (**A**) sind es 8 Felder, bei (**B**) 10, bei (**C**) 12, bei (**D**) 12 und bei (**E**) 14. Also ist die Gewinnchance bei Rad (**A**) am grössten.

17. Kobold Kolo aus dem Dunkelwald sagt mittwochs, freitags und sonntags nie die Wahrheit. An den anderen vier Wochentagen sagt er immer die Wahrheit. Eines Tages hatte die Sonnenelfe Solej das folgende Gespräch mit Kolo:

Argentinien

Solej: „Welcher Wochentag ist heute?"
Kolo: „Heute ist Sonntag."
Solej: „Welcher Wochentag ist morgen?"
Kolo: „Morgen ist Donnerstag."

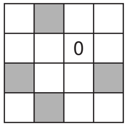
An welchem Wochentag hat dieses Gespräch stattgefunden?

(**A**) an einem Dienstag (**B**) an einem Mittwoch (**C**) an einem Freitag
(**D**) an einem Samstag (**E**) an einem Sonntag

Lösung: Kolo kann nicht zweimal die Wahrheit gesagt haben, denn wenn heute Sonntag wäre, so wäre morgen Montag und nicht Donnerstag. Der Tag, an dem das Gespräch stattgefunden hat, war folglich ein Tag, an dem Kolo nie die Wahrheit sagt, also entweder ein Mittwoch, ein Freitag oder ein Sonntag.
Es kann kein Mittwoch gewesen sein, denn sonst hätte Kolo bei der 2. Antwort die Wahrheit gesagt. Es kann auch kein Sonntag gewesen sein, denn sonst hätte Kolo bei der 1. Antwort die Wahrheit gesagt. Also muss das Gespräch an einem Freitag stattgefunden haben, und tatsächlich sind an einem Freitag Kolos Aussagen beide falsch.

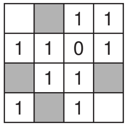
18. Polen

In das Gitter rechts soll in jedes Feld eine 0 oder eine 1 geschrieben werden. Eine 0 ist bereits eingetragen. Am Ende soll die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen 3 sein.
Welche Summe haben dann die vier Zahlen in den grauen Feldern?

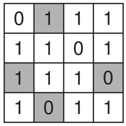


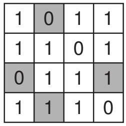
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

Lösung: Da nur Nullen und Einsen eingetragen werden sollen, müssen in jeder Zeile, Spalte und Diagonale eine Null und drei Einsen stehen, damit die Summe 3 ist. Die Zeile, die Spalte und die Diagonale, in der die vorgegebene 0 steht, müssen mit Einsen aufgefüllt werden (siehe Bild rechts).



Wer nun in irgendein Feld 0 oder 1 einträgt, kann das Gitter jeweils auf eine Weise vervollständigen, wie rechts zu sehen ist. Also gibt es zwei Möglichkeiten, das Gitter auszufüllen. In beiden Fällen ist die Summe der Zahlen in den grauen Feldern 2.

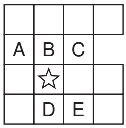




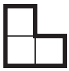
Wer sich nach dem Eintragen der Einsen im ersten Schritt die 2. Spalte und die 3. Zeile ansieht, bemerkt, dass dort nur noch die grauen Felder leer sind. Es stehen in diesen beiden Reihen schon jeweils zwei Einsen, es fehlen also jeweils eine 0 und eine 1. Die gesuchte Summe ist also $0 + 1 + 0 + 1 = 2$.

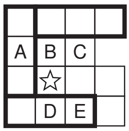
19. Hongkong

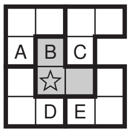
Ich zerschneide die abgebildete Figur entlang der Linien in fünf Teile. Die fünf Teile bestehen alle aus drei Quadraten und haben dieselbe Form.
Welcher Buchstabe befindet sich auf dem Teil mit dem Stern?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

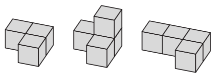
Lösung: Es gibt nur zwei mögliche Teile, die aus drei Quadraten bestehen: Rechtecke  und „Ecken“ .
Ein Versuch, die Figur in fünf Rechtecke zu zerschneiden, zeigt, dass das nicht möglich ist, siehe linkes Bild. In Teile der Form einer „Ecke“ lässt sich die Figur auf genau eine Weise zerschneiden, siehe rechtes Bild. Auf dem Teil mit dem Stern befindet sich der Buchstabe B.

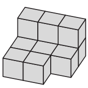
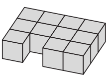
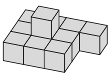
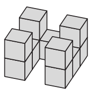
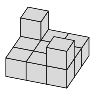




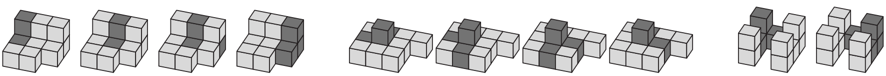
20. Deutschland

Tino stellt die drei rechts abgebildeten Bausteine zu einem Bauwerk zusammen.
Wie könnte es aussehen?

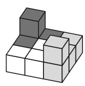


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir überlegen uns, wo der mittlere Baustein in den fünf Bauwerken überhaupt stehen könnte. Da das Bauwerk (**B**) flach ist, kann dieses Bauwerk den mittleren Baustein nicht enthalten.
In den Bauwerken (**A**), (**C**) und (**D**) kann der mittlere Baustein nur wie folgt platziert werden:



In keinem dieser Fälle lässt sich das Bauwerk mit den beiden anderen Bausteinen vervollständigen. Nur das Bauwerk (**E**) kann aus den drei Bausteinen gebaut werden. Eine Möglichkeit ist rechts abgebildet.



21. Greta und Miray schreiben beide drei 3-stellige Zahlen auf und verwenden dabei jede der Ziffern von 1 bis 9 genau einmal. Jede ordnet ihre Zahlen der Grösse nach.
Gretas mittlere Zahl ist die grösstmögliche, die man auf diese Weise als mittlere Zahl erhalten kann.
Mirays mittlere Zahl ist die kleinstmögliche, die man auf diese Weise als mittlere Zahl erhalten kann.
Wie gross ist die Differenz zwischen Gretas mittlerer Zahl und Mirays mittlerer Zahl?

Griechenland

(**A**) 490 (**B**) 586 (**C**) 618 (**D**) 642 (**E**) 684

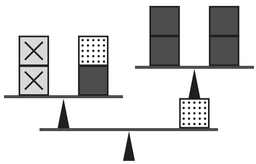
Lösung: Wir bestimmen zuerst die grösstmögliche Zahl, die man auf diese Weise als mittlere Zahl erhalten kann. An der Hunderterstelle dieser Zahl kann nicht 9 stehen, da sie sonst die grösste der drei Zahlen wäre. Also ist die Zahl an der Hunderterstelle höchstens 8. Wenn an der Hunderterstelle der mittleren Zahl 8 steht, muss an der Hunderterstelle der grössten Zahl 9 stehen. Also ist die mittlere Zahl kleiner oder gleich 876. Und das ist wirklich möglich, zum Beispiel: 123, 876, 954.
Die kleinstmögliche mittlere Zahl zu bestimmen, funktioniert auf dieselbe Weise. An der Hunderterstelle der mittleren Zahl kann nicht 1 stehen, also steht dort mindestens 2. Steht dort 2, so muss an der Hunderterstelle der kleinsten Zahl 1 stehen, und die mittlere Zahl ist folglich grösser oder gleich 234, zum Beispiel bei der Verteilung 156, 234, 987.
Die gesuchte Differenz lautet $876 - 234 = 642$.

In dem abgebildeten Sudoku soll in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem der vier dick umrandeten Quadrate jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 genau einmal stehen.
Wie sieht das fertig ausgefüllte Sudoku aus?

1			4
			2
	3		
		4	

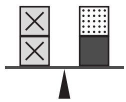
22. Einige Blöcke sind wie abgebildet auf drei Waagen verteilt. Alle drei Waagen sind im Gleichgewicht. Sehen zwei Blöcke gleich aus, so haben sie auch das gleiche Gewicht.
Bei welcher der folgenden Reihenfolgen sind die Blöcke von links nach rechts von leicht zu schwer geordnet?

Finnland

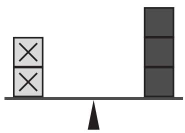


(**A**)  (**B**) 
(**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir betrachten als erstes die kleine Waage, die auf der linken Seite steht. Der Block  kann nicht der schwerste der drei Blöcke sein, also schwerer als  und schwerer als , da sonst die beiden Blöcke links schwerer als die beiden Blöcke rechts wären. Genauso kann der Block  nicht der leichteste sein. Also kommen nur die Antworten (**A**) und (**D**) in Frage.



Nun betrachten wir die grosse Waage. Wir entfernen in Gedanken auf beiden Seiten jeweils die kleine Waage, einen Block  und einen Block . Damit bleibt die Waage im Gleichgewicht. Auf der linken Seite sind 2 Blöcke  und auf der rechten Seite 3 Blöcke . Daraus folgt, dass ein Block  leichter ist als ein Block . Die richtige Reihenfolge ist bei (**A**) abgebildet.



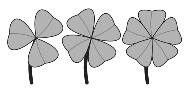
23. Sara hat 3-mal so viele Glitzersteine wie Rasmus. Sie gibt Rasmus ein Viertel ihrer Steine ab. Nun hat Sara noch 6 Steine mehr als Rasmus.
Wie viele Glitzersteine haben Sara und Rasmus zusammen?

Iran

(**A**) 72 (**B**) 64 (**C**) 54 (**D**) 48 (**E**) 40

Lösung: Da Sara zu Beginn 3-mal so viele Glitzersteine wie Rasmus hat, ist die Anzahl der Glitzersteine, die Sara zu Beginn hat, ein Vielfaches von 3. Da Sara ein Viertel ihrer Steine abgibt, ist die Anzahl der Glitzersteine, die Sara zu Beginn hat, auch ein Vielfaches von 4. Die Anzahl der Glitzersteine, die Sara zu Beginn hat, ist folglich ein Vielfaches von 12.
Hätte Sara zu Beginn 12 Steine, so hätte Rasmus zu Beginn $12 : 3 = 4$ Steine. Anschließend würde Sara $12 : 4 = 3$ Steine an Rasmus abgeben. Dann hätte Sara 9 Steine und Rasmus hätte 7 Steine, Sara hätte dann also 2 Steine mehr als Rasmus und nicht 6. Somit hat Sara mehr als 12 Steine.
Hätte Sara zu Beginn 2-mal so viele Steine (also $2 \cdot 12 = 24$ Steine), so kann genauso gerechnet werden. Dann erhalten wir an jeder Stelle die 2-fache Menge, am Ende hat Sara dann $2 \cdot 2 = 4$ Steine mehr als Rasmus und nicht 6. Somit hat Sara mehr als 24 Steine.
Hätte Sara zu Beginn 3-mal so viele Steine, so erhalten wir an jeder Stelle die 3-fache Menge. Am Ende hätte Sara dann $3 \cdot 2 = 6$ Steine mehr als Rasmus, wie in der Aufgabe angegeben. Es muss sich also um diesen Fall handeln. Sara hat zu Beginn $3 \cdot 12 = 36$ Steine und Rasmus $36 : 3 = 12$. Zusammen haben Sara und Rasmus $36 + 12 = 48$ Glitzersteine.

24. Lotte findet auf einer Wiese 3-blättrige, 4-blättrige und sogar 5-blättrige Kleeblätter. Für ihre Mutter möchte sie einen Kleeblatt-Strauss mit insgesamt 23 Blättern pflücken. Wie viele verschiedene solche Sträusse gibt es?



Dänemark

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Es kann höchstens 4 von den 5-blättrigen Kleeblättern geben, denn $5 \cdot 5 = 25$ ist bereits grösser als 23. Wir bestimmen systematisch mithilfe einer Tabelle, welche Möglichkeiten es mit jeweils 4, 3, 2, 1 oder 0 von den 5-blättrigen Kleeblättern gibt.

Anzahl 5-blättrige	Rest	Anzahl 4-blättrige	Rest	Anzahl 3-blättrige
4	$23 - 4 \cdot 5 = 3$	0	$3 - 0 \cdot 4 = 3$	1
3	$23 - 3 \cdot 5 = 8$	2	$8 - 2 \cdot 4 = 0$	0
		1	$8 - 1 \cdot 4 = 4$	nicht möglich
		0	$8 - 0 \cdot 4 = 8$	nicht möglich
2	$23 - 2 \cdot 5 = 13$	3	$13 - 3 \cdot 4 = 1$	nicht möglich
		2	$13 - 2 \cdot 4 = 5$	nicht möglich
		1	$13 - 1 \cdot 4 = 9$	3
		0	$13 - 0 \cdot 4 = 13$	nicht möglich
1	$23 - 1 \cdot 5 = 18$	4	$18 - 4 \cdot 4 = 2$	nicht möglich
		3	$18 - 3 \cdot 4 = 6$	2
		2	$18 - 2 \cdot 4 = 10$	nicht möglich
		1	$18 - 1 \cdot 4 = 14$	nicht möglich
		0	$18 - 0 \cdot 4 = 18$	6
0	$23 - 0 \cdot 5 = 23$	5	$23 - 5 \cdot 4 = 3$	1
		4	$23 - 4 \cdot 4 = 7$	nicht möglich
		3	$23 - 3 \cdot 4 = 11$	nicht möglich
		2	$23 - 2 \cdot 4 = 15$	5
		1	$23 - 1 \cdot 4 = 19$	nicht möglich
		0	$23 - 0 \cdot 4 = 23$	nicht möglich

Insgesamt gibt es 7 Möglichkeiten.

Magische Geburtstags-Quadrate

Bestimmt hast du vorn auf der Broschüre die drei magischen Quadrate zum Ausfüllen entdeckt. Auf der Rückseite steht eine Erklärung dazu und auf Seite 13 gibt es außerdem weitere magische Quadrate zum Ausfüllen und Entdecken. Mit der hier beschriebenen Methode kannst du ein magisches 4×4-Quadrat mit deinem Geburtsdatum in der ersten Zeile erzeugen. Sie stammt vom indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887–1920). Ziel ist es, dass möglichst alle eingetragenen Zahlen verschieden sind.
Als Beispiel erzeugen wir ein magisches Geburtstags-Quadrat für das Känguru der Mathematik mit dem Geburtsdatum des Känguru-Wettbewerbs, der am 16.3.1995 in Deutschland zum ersten Mal stattfand.

Schritt 1: Schreib dein Geburtsdatum wie im Beispiel in die erste Zeile: die Tageszahl in das erste Feld, die Monatszahl in das zweite Feld und die Jahreszahl in das dritte und vierte Feld.

Schritt 2: Trag dieselben Zahlen nun jeweils in der Reihenfolge wie im Beispiel in die weiteren Zeilen ein.

Schritt 3: Addiere bzw. subtrahiere in den Feldern wie im Quadrat auf dem Pfeil angegeben. Fertig!

Warum ist dieses Quadrat tatsächlich ein magisches Quadrat?

16	3	19	95
95	19	3	16
3	16	95	19
19	95	16	3

0	0	0	0
+3	−3	−1	+1
−2	+2	+2	−2
−1	+1	−1	+1

→

16	3	19	95
98	16	2	17
1	18	97	17
18	96	15	4

Warum bleibt es nach der Veränderung ein magisches Quadrat?

Hier kannst du dein eigenes magisches Geburtstags-Quadrat erzeugen:

Male zuerst im Beispiel Felder mit gleichen Zahlen mit der gleichen Farbe aus und übertrage das Farbmuster.

0	0	0	0
+3	−3	−1	+1
−2	+2	+2	−2
−1	+1	−1	+1

→

Welche magische Summe hat dein magisches Geburtstags-Quadrat?

Hast du im Januar Geburtstag? Dann musst du an einer Stelle $1 - 2$ rechnen. Das Ergebnis ist die negative Zahl -1, sprich „minus 1". Negative Zahlen kennst du vermutlich aus dem Alltag, zum Beispiel vom Thermometer, aber das Rechnen mit ihnen lernst du in der Schule wahrscheinlich erst später.

Dein magisches Geburtstags-Quadrat hat noch weitere magische Eigenschaften: Auch die 4 Zahlen in den Ecken, die 4 Zahlen in den 2×2-Teilquadraten in den Ecken und in der Mitte sowie die 4 Zahlen in den Ecken jedes 3×3-Teilquadrats haben die gleiche magische Summe. Warum ist das so?

Wenn wie im Beispiel nicht alle Einträge verschieden sind, verändern wir die Zahlen noch wie folgt:

16	3	19	95
98	16	2	17
1	18	97	17
18	96	15	4

0	0	0	0
+3	−3	+3	−3
0	0	0	0
−3	+3	−3	+3

→

16	3	19	95
101	13	5	14
1	18	97	17
15	99	12	7

Warum bleibt es auch nach dieser Veränderung ein magisches Quadrat?

Schaffst du es, dass dein magisches Geburtstags-Quadrat 16 verschiedene Zahlen enthält?

Statt der Zahl 3 kannst du auch jede andere Zahl wählen. Probier es aus.

0	0	0	0
+	−	+	−
0	0	0	0
−	+	−	+

→

Leider klappt das nicht mit allen Geburtsdaten, zum Beispiel ist der 14.4.2014 ungünstig.

Wie sehen die magischen Geburtstags-Quadrate deiner Eltern, Geschwister und Freunde aus?

Kreuze und Kreise: BINOXXO

In den folgenden Diagrammen soll in jedes Feld ein Kreuz × oder ein Kreis ○ eingetragen werden. In jeder senkrechten und in jeder waagerechten Reihe soll es genauso viele Kreuze wie Kreise geben. Außerdem dürfen in keiner senkrechten oder waagerechten Reihe mehr als zwei Kreuze oder mehr als zwei Kreise direkt aufeinander folgen.

Wer trägt die Kreuze und Kreise richtig ein?

			○		
○		×	○		
				×	
○	○			×	
	×				×
		×			

				×	
×					×
			○	○	
	×	×			
○					×
	○		○		

	○				
○			×	×	
	×		×		
					○
	○	○			×
				×	

○					×
		×	○		
	○				
×				○	
		○			
○					○

	×				
		×			×
	○				
	○		○		
				×	
	×			×	○
					○
○					

		×	×		
×					
		○			○
×					
×			×		○
	○				
○					
		×		×	

				×	
×		○		○	
		○			×
			×		
					○
				○	
	○	○			
×			×		

○					○
			○		
○	○			×	
		○	○		
○				○	
	×				×

	○								
×		×					×		×
			○	×		○			
○		○		×				○	
					×		×		×
		×			×				

					○				
		○			○				×
			×			○	×		
×						○			
	○	○		×			×		
	○					×			

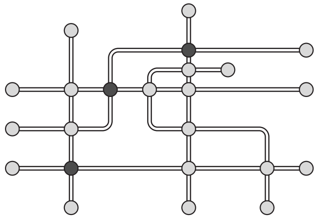
	○		○				
×				×			×
				×			
	×	×					
			○			×	
	×					×	
		×					○
			○				

×			○	×			○
	×	×			○	×	
×							×
○							×
	○	○			○	×	
			×	×			
○							○
	×					×	

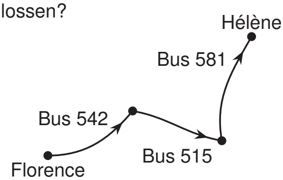
			○		○		
○			×				
	○				○		×
							×
		○	○				
				×			
×	×						
	×				○		×

Öffentlicher Nahverkehr

U-BAHN: Rechts ist das U-Bahn-Netz der Stadt abgebildet, in der Thomas wohnt. Thomas steht in einem der U-Bahnhöfe und hat vor, Eis essen zu gehen. Ganz in der Nähe der 3 markierten U-Bahnhöfe sind Eiscafés. Thomas überlegt, wohin er fahren soll. Zu einem der markierten U-Bahnhöfe muss er mindestens 4 Stationen fahren, zu den anderen beiden gibt es Strecken, bei denen er nur 3 Stationen fahren muss.
In welchem U-Bahnhof steht Thomas?



REGIONALEXPRESS: Direkt neben unserem Bahnhof gibt es einen beschrankten Bahnübergang. Von Montag bis Freitag fährt in beide Richtungen zu jeder vollen Stunde ein Regionalexpress, um 4:00 Uhr der erste und um 23:00 Uhr der letzte. Alle Züge halten jeweils für 1 Minute 30 Sekunden. Da die Züge in beiden Richtungen zur selben Zeit am Bahnhof halten, schließt die Schranke am Bahnübergang 3 Minuten vor dem Halt und öffnet erst wieder 1 Minute nach dem Halt der beiden Züge.
Für welche Gesamtdauer ist die Schranke von Montag bis Freitag geschlossen?



BUS: Florence möchte mit dem Bus ihre Schwester Hélène besuchen. Leider gibt es keine Direktverbindung, sie muss auf der Strecke zweimal umsteigen. Die drei Buslinien fahren in verschiedenen Taktungen:

Bus 542 fährt alle 10 Minuten,
Bus 515 fährt alle 35 Minuten und
Bus 581 fährt alle 25 Minuten.

Wenn Florence mit dem ersten Bus 542 um 6:20 Uhr losgefahren wäre, wäre sie um 7:15 Uhr bei ihrer Schwester angekommen. Dabei hätte sie an jeder der beiden Haltestellen, an denen sie umsteigen muss, 3 Minuten auf den nächsten Bus warten müssen. Leider hat sie den Bus 542 um 6:20 Uhr knapp verpasst und kann erst den nächsten Bus 542 um 6:30 Uhr nehmen. Dadurch kann sie auch erst mit einem späteren Bus 515 und einem späteren Bus 581 fahren. Wann kommt Florence schließlich bei ihrer Schwester an?

STRAßENBAHN: Vier befreundete Straßenbahn-Fahrer treffen sich, um Michis 54. Geburtstag zu feiern. Aus den Unterhaltungen geht hervor:

Peter hat mit 26 Jahren angefangen, Straßenbahn zu fahren.
Michi und der Fahrer der Linie 22 sind Nachbarn.
Die Nummer der Straßenbahn, die Peter fährt, ist kleiner als 20.
Der Fahrer der Linie 22 hat zufällig genau mit 22 Jahren angefangen, Straßenbahn zu fahren.
Der Fahrer der Linie 5 hat vor genau 10 Jahren angefangen, Straßenbahn zu fahren.
Michi fährt nicht die Linie 13.
Nadim hat 6 Jahre vor Oleš angefangen, Straßenbahn zu fahren.

Wer findet für jeden der Straßenbahn-Fahrer sein Alter, sein Alter bei der 1. Fahrt und die Nummer seiner Linie heraus?

Klassenstufen 7 und 8

1. An meinem Kühlschrank haften vier Magnete mit Ziffern darauf 2 0 2 5.
Welche ist die grösste Zahl, die sich aus ihnen bilden lässt?

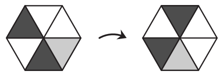
Österreich

(**A**) 2052 (**B**) 5202 (**C**) 2502 (**D**) 5220 (**E**) 5022

Lösung: Die grösste Zahl, die sich mit den Magneten bilden lässt, ist 5220.

2. Finn hat ein sechseckiges Blatt Papier. Er dreht es schrittweise immer ein Feld im Uhrzeigersinn. Nach welcher der folgenden Schrittzahlen liegt das Blatt wieder wie am Anfang?

Deutschland



(**A**) 14 (**B**) 17 (**C**) 10 (**D**) 15 (**E**) 12

Lösung: Nach 6 Schritten liegt das Blatt zum ersten Mal wieder wie am Anfang. Deshalb liegt das Blatt auch nach jeder Schrittzahl, die ein Vielfaches von 6 ist, wieder wie am Anfang. Das einzige Vielfache von 6 in den Antwortmöglichkeiten ist 12, daher ist dies die richtige Antwort.

— Ähnlich waren in Klassenstufe 3/4 die Aufgabe 1 und in Klassenstufe 5/6 die Aufgabe 5. —

3. Vivienne möchte die vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 in die vier Kästchen der Rechnung schreiben.
Welches ist das kleinste Ergebnis, das Vivienne erhalten kann?

Deutschland

☐ – ☐ + ☐ – ☐

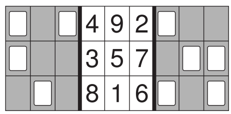
(**A**) –3 (**B**) –4 (**C**) –5 (**D**) –6 (**E**) –7

Lösung: Vivienne erhält das kleinstmögliche Ergebnis, wenn sie die beiden grössten Zahlen, 3 und 4, in die beiden Kästchen mit einem Minus davor schreibt und die Zahlen 1 und 2 in die beiden anderen Kästchen. Dann erhält sie 1 – 3 + 2 – 4 = –4.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 4 zu lösen. —

4. Eine Klappkarte mit Löchern wird an den dicken Linien gefaltet.
Nach dem Falten ist nur noch eine einzige Zahl zu sehen. Welche?

Tunesien

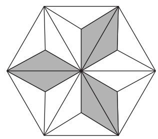


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

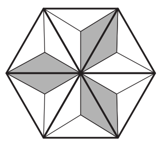
Lösung: Wenn nur die linke Klappe an der dicken Linie nach innen gefaltet wird, so sind noch die Zahlen 4, 2, 7 und 1 zu sehen. Wenn nur die rechte Klappe an der dicken Linie nach innen gefaltet wird, so sind noch die Zahlen 2, 3, 5, 8 und 6 zu sehen. Nur die Zahl 2 ist in beiden Fällen noch zu sehen und damit auch, wenn beide Klappen nach innen gefaltet werden.

5. Das regelmässige Sechseck rechts ist in gleich grosse Dreiecke geteilt.
Welcher Anteil des Sechsecks ist grau?

Marokko



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{6}$



Lösung: Wir zählen, dass das Sechseck in 18 gleich grosse Dreiecke geteilt ist. Von diesen sind 6 grau gefärbt, das ist ein Anteil von $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.
Wer weiss, dass sich ein regelmässiges Sechseck in 6 gleichseitige Dreiecke zerlegen lässt, sieht direkt, dass der gesuchte Anteil $\frac{1}{3}$ ist, da in jedem dieser Dreiecke eines von 3 der enthaltenen Dreiecke grau ist.

6. Grossbritannien

Louisa ist am 56. Geburtstag ihres Grossvaters geboren. Heute feiern die beiden gemeinsam Geburtstag. Sie sind zusammen 100 Jahre alt. Wie alt ist Louisa?

(**A**) 31 (**B**) 29 (**C**) 25 (**D**) 24 (**E**) 22

Lösung: Als Louisa geboren wurde, waren ihr Grossvater und sie zusammen 56 Jahre alt. Heute sind die beiden zusammen $100 - 56 = 44$ Jahre älter. Folglich sind beide seit Louisas Geburt um die Hälfte, also $44 : 2 = 22$ Jahre, älter geworden. Louisa ist somit 22 Jahre alt.

7. Deutschland

Vor meinem Lieblings-Burger-Restaurant steht eine Tafel mit der Speisekarte. Der Regen hat einige der Zahlen weggewaschen. Ich weiss, dass die Burger von oben nach unten teurer werden.
Wie viel kostet ein Deluxe-Burger <u>mindestens</u>?

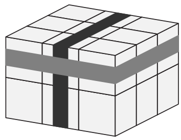
(**A**) 5,80 (**B**) 6,80 (**C**) 7,80 (**D**) 8,80 (**E**) 9,80

Lösung: Jeder Burger hat einen höheren Preis als derjenige direkt darüber. Der kleinste Preis, den der Burger *Klassisch* haben kann, ist 4,30. Der Burger *Bacon* kostet mindestens 4,60 und der Burger *Viel Käse* kostet mindestens 5,50. Der kleinste Preis, den der Burger *Doppelter* haben kann, ist 6,10. Damit kostet der Burger *Deluxe* mindestens 6,80.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 6 gestellt. —

8. Dänemark

Es sind 18 Würfel so gestapelt, dass sie einen Quader bilden. Um den Quader sind zwei Bänder rundherum gebunden.
Wie viele der Würfel berühren mindestens eines der Bänder?



(**A**) 15 (**B**) 13 (**C**) 12 (**D**) 11 (**E**) 9

Lösung: In der oberen Schicht berühren alle 9 Würfel mindestens eines der Bänder. In der unteren Schicht berühren nur die drei Würfel in der mittleren Reihe eines der Bänder, und zwar das schwarze. Insgesamt berühren daher $9 + 3 = 12$ Würfel mindestens eines der Bänder.
Eine andere Herangehensweise ist es zu zählen, wie viele Würfel keines der Bänder berühren. Das sind 6 der unteren Würfel. Von allen 18 Würfeln berühren daher $18 - 6 = 12$ mindestens eines der Bänder.

9. Grossbritannien

Der neue Osterhasen-Verpackungsautomat verpackt in jeweils 12 Minuten 100 Schokoladen-Osterhasen in Folie. Wie viele Schokoladen-Osterhasen verpackt der Automat in 12 Stunden?

(**A**) 6000 (**B**) 4500 (**C**) 3000 (**D**) 2400 (**E**) 1600

Lösung: In einer Stunde gibt es 60-mal eine Minute, also gibt es in 12 Stunden 60-mal 12 Minuten. Der Automat verpackt in 12 Stunden daher 60-mal so viele Schokoladen-Osterhasen wie in 12 Minuten, das sind $60 \cdot 100 = 6000$.

10. Norwegen

Sandra würfelt mit drei Spielwürfeln. Die Würfel zeigen zusammen 8 Augen. Jeder der drei Würfel zeigt eine andere Augenzahl. Welche Augenzahl ist <u>sicher nicht</u> dabei?

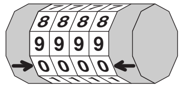
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir überlegen, wie wir mit drei verschiedenen Augenzahlen zusammen 8 Augen erhalten können. Die einzigen beiden Möglichkeiten sind 1, 2, 5 und 1, 3, 4. Jede der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 kann dabei sein, aber die Augenzahl 6 ist sicher nicht dabei.
Die Aufgabe kann auch wie folgt gelöst werden: Wäre die Augenzahl 6 dabei, so müssten die anderen beiden Würfel zusammen $8 - 6 = 2$ Augen zeigen und ihre Augenzahlen müssten beide 1 sein. Dies widerspricht der Bedingung, dass jeder der drei Würfel eine andere Augenzahl zeigt.

— Eine deutlich leichteres Würfelproblem galt es in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 8 zu lösen. —

11. Türkei

Bei meinem Fahrradschloss wird an den Pfeilen die richtige Kombination eingestellt. Im Moment steht dort 0000. Zwei Reihen oberhalb steht 8888. Nun stelle ich die richtige Kombination an den Pfeilen ein. Zwei Reihen oberhalb steht jetzt 2719. Welche ist die richtige Kombination?

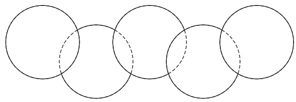


(**A**) 4931 (**B**) 4593 (**C**) 0531 (**D**) 4537 (**E**) 0937

Lösung: Steht zwei Reihen oberhalb der Pfeile eine 8, dann steht an den Pfeilen wie abgebildet eine 0. Steht zwei Reihen oberhalb eine 9, dann steht an den Pfeilen eine 1. In allen anderen Fällen ist die Zahl an den Pfeilen um 2 grösser als zwei Reihen oberhalb. Wenn zwei Reihen oberhalb 2719 steht, so steht an den Pfeilen 4931, das ist die richtige Kombination.

12. Afghanistan

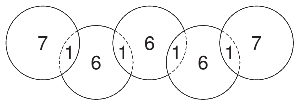
Die Figur rechts wird von fünf Kreisen mit einem Flächeninhalt von jeweils $8\,\text{cm}^2$ gebildet. Die Flächen, an denen zwei Kreise überlappen, haben jeweils einen Flächeninhalt von $1\,\text{cm}^2$.
Welchen Flächeninhalt hat die gesamte Figur?



(**A**) $31\,\text{cm}^2$ (**B**) $34\,\text{cm}^2$ (**C**) $36\,\text{cm}^2$ (**D**) $38\,\text{cm}^2$ (**E**) $39\,\text{cm}^2$

Lösung: Die Summe der Flächeninhalte der fünf Kreise ist $5 \cdot 8\,\text{cm}^2 = 40\,\text{cm}^2$. In dieser Summe sind die Flächeninhalte der vier Flächen, an denen zwei Kreise überlappen, doppelt enthalten. Diese haben zusammen einen Flächeninhalt von $4 \cdot 1\,\text{cm}^2 = 4\,\text{cm}^2$. Daher hat die gesamte Figur einen Flächeninhalt von $40\,\text{cm}^2 - 4\,\text{cm}^2 = 36\,\text{cm}^2$.

Lösungsvariante: Die Aufgabe lässt sich auch gut lösen, indem wir im Bild die Flächeninhalte der einzelnen Flächen eintragen.



Die Flächen, an denen zwei Kreise überlappen, haben jeweils einen Flächeninhalt von $1\,\text{cm}^2$. Folglich haben die beiden äusseren Flächen den Flächeninhalt $7\,\text{cm}^2$ und die drei restlichen Flächen den Flächeninhalt $6\,\text{cm}^2$. Wegen $4 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 36$ hat die gesamte Figur den Flächeninhalt $36\,\text{cm}^2$.

13. Uganda

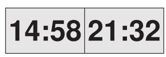
In der Halle findet ein Hürdenlauf über 60 Meter statt. Die 5 Hürden sind schon aufgebaut. Die erste Hürde steht 12 Meter nach dem Start. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Hürden beträgt jeweils 8 Meter. Wie weit ist die letzte Hürde vom Ziel entfernt?

(**A**) 18 Meter (**B**) 16 Meter (**C**) 14 Meter (**D**) 12 Meter (**E**) 10 Meter

Lösung: Die erste Hürde steht 12 Meter nach dem Start. Danach stehen noch 4 weitere Hürden. Die letzte Hürde steht folglich $12\,\text{m} + 4 \cdot 8\,\text{m} = 44\,\text{m}$ nach dem Start, also $60\,\text{m} - 44\,\text{m} = 16\,\text{m}$ vom Ziel entfernt.

14. Spanien

Werner trainiert auf einem Laufband im Fitnessstudio. Dabei schaut er immer wieder auf zwei Stoppuhren. Die erste gibt die Zeit an, die seit dem Trainingsstart vergangen ist, und die zweite die Zeit, die noch bis zum Ende des Trainings bleibt. Werner freut sich, als beide Stoppuhren dasselbe anzeigen. Was zeigen sie dann?

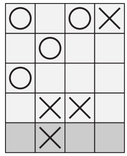


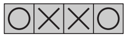
(**A**) 17:45 (**B**) 17:50 (**C**) 18:00 (**D**) 18:15 (**E**) 18:20

Lösung: Da die erste Uhr die Zeit angibt, die seit dem Trainingsstart vergangen ist, und die zweite Uhr die Zeit, die noch bis zum Ende des Trainings bleibt, ist die Summe der angezeigten Zeiten stets die gesamte Trainingszeit. Diese beträgt 14 min 58 s + 21 min 32 s = 36 min 30 s. Genau nach der Hälfte des Trainings zeigen beiden Uhren die Hälfte der Trainingszeit an, und zwar 18:15.

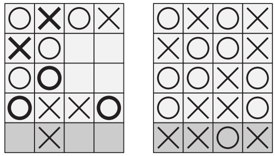
15. Polen

In dem abgebildeten Rechteck soll in jedes Kästchen entweder ein Kreis oder ein Kreuz eingetragen werden. In keiner waagerechten oder senkrechten Linie dürfen 3 Kreise oder 3 Kreuze unmittelbar aufeinander folgen. Wie muss die unterste Zeile ausgefüllt werden?



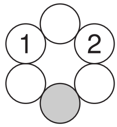
(**A**)  (**B**)  (**C**) 
(**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir füllen die Kästchen Schritt für Schritt aus. Immer, wenn in drei aufeinander folgenden Feldern zweimal dasselbe Symbol vorkommt, muss in das dritte Feld das jeweils andere Symbol eingetragen werden. Zu Beginn können wir so fünf Kästchen ausfüllen, siehe linkes Bild. Wenn wir so fortfahren, erhalten wir das vollständig ausgefüllte Rechteck, siehe rechtes Bild. Die unterste Zeile ist wie in (**D**) ausgefüllt.



16. Belarus

In jeden der Kreise rechts soll eine Zahl eingetragen werden. Jede Zahl soll die Summe der beiden Zahlen in den benachbarten Kreisen sein. Zwei Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahl gehört in den grauen Kreis?



(**A**) 0 (**B**) -1 (**C**) -2 (**D**) -3 (**E**) -5

Lösung: Im Kreis zwischen den Kreisen mit der 1 und der 2 soll die Summe der beiden stehen, also 3. Da die 1 die Summe der Zahlen in den benachbarten Kreisen ist, steht unterhalb des Kreises mit der 1 wegen $3 + (-2) = 1$ die Zahl -2. Da die 2 die Summe der Zahlen in den benachbarten Kreisen ist, steht unterhalb des Kreises mit der 2 wegen $3 + (-1) = 2$ die Zahl -1. In den grauen Kreis gehört $(-2) + (-1) = -3$.

17. USA

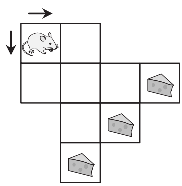
Auf einer Burg sind alle Ritter entweder edle Ritter, die immer die Wahrheit sagen, oder Raubritter, die immer lügen. Es sind 8 edle Ritter mehr als Raubritter. Jeder Ritter wurde gefragt: „Bist du ein edler Ritter?" Alle haben geantwortet, und 20-mal war die Antwort „Ja". Wie viele Raubritter gibt es auf der Burg?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Auf die Frage „Bist du ein edler Ritter?" antworten alle edlen Ritter mit „Ja"und alle Raubritter, weil sie lügen, ebenfalls mit „Ja". Die Anzahl 20 der „Ja"-Antworten entspricht also der Gesamtanzahl der Ritter. Würden 8 edle Ritter die Burg verlassen, so wären von den übrigen $20 - 8 = 12$ Rittern gleich viele edle Ritter wie Raubritter. Daher sind es $12 : 2 = 6$ Raubritter.

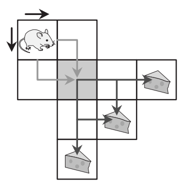
18. Vietnam

Die Maus Niki möchte zu einem Käsestück kommen. Niki läuft bei jedem Schritt ein Kästchen nach rechts oder ein Kästchen nach unten.
Wie viele verschiedene Wege gibt es für Niki, um zu einem Käsestück zu kommen?



(**A**) 10 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 6 (**E**) 5

Lösung: Jeder Weg vom Startkästchen zu einem der Käsestücke verläuft über das grau markierte Kästchen. Es gibt 2 Wege vom Startkästchen zum grauen Kästchen. Vom grauen Kästchen aus gibt es 4 Wege zu einem der Käsestücke. Jeder Weg lässt sich aus einem Weg vom Startkästchen zum grauen Kästchen und einem Weg vom grauen Kästchen zu einem Käsestück kombinieren. Folglich gibt es $2 \cdot 4 = 8$ Wege vom Startkästchen zu einem der Käsestücke.



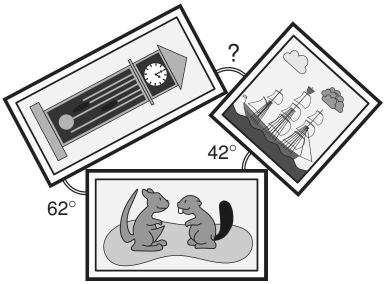
19. Diego macht sich immer um 8 Uhr auf den Weg zur Schule. Diese ist 1 km entfernt. Wenn er zu Fuss geht, hat er eine Geschwindigkeit von 4 km/h und ist 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn da. Wenn er mit dem Fahrrad fährt, hat er eine Geschwindigkeit von 15 km/h.
USA
Wie viele Minuten ist Diego dann vor Unterrichtsbeginn da?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

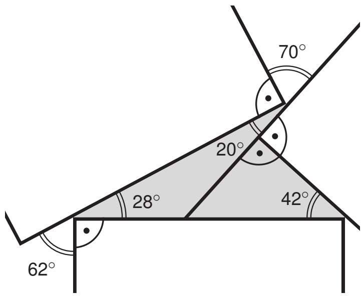
Lösung: Zu Fuss geht Diego mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h, folglich braucht er für die Strecke von 1 km zur Schule $\frac{1}{4}$ einer Stunde, das heisst 15 Minuten. Er erreicht die Schule um 8:15 Uhr. Da er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn da ist, beginnt der Unterricht um 8:20 Uhr.
Mit dem Fahrrad braucht Diego mit der Geschwindigkeit von 15 km/h für dieselbe Strecke $\frac{1}{15}$ einer Stunde, das heisst 4 Minuten. Er kommt dann um 8:04 Uhr an, und das ist 16 Minuten vor Unterrichtsbeginn.

20. Drei rechteckige Fotos liegen wie abgebildet auf dem Tisch.
Wie gross ist der mit dem Fragezeichen markierte Winkel?
Taiwan

(**A**) 68° (**B**) 70° (**C**) 72° (**D**) 74° (**E**) 78°

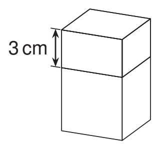


Lösung: Wir verlängern die linke Kante des Schiff-Fotos bis zum Tierfoto und bestimmen die Innenwinkel der beiden entstandenen Dreiecke.
Das rechte Dreieck ist rechtwinklig und der dritte Innenwinkel unten links ist 180° − 90° − 42° = 48° gross.
Im linken Dreieck ist der Innenwinkel unten rechts Nebenwinkel des 48°-Winkels und folglich 180° − 48° = 132° gross.
Der Innenwinkel unten links hat denselben Scheitelpunkt wie der gegebene 62°-Winkel und ist 180° − 90° − 62° = 28° gross.
Der obere Innenwinkel des linken Teildreiecks ist demnach 180° − 132° − 28° = 20° gross. Schliesslich hat der gesuchte Winkel denselben Scheitelpunkt wie der 20°-Winkel und ist somit 180° − 90° − 20° = 70° gross.



21. Die Höhe eines Quaders wird um 3 cm verkleinert. Der Oberflächeninhalt des Quaders verringert sich dadurch um 60 cm^2, und der Restkörper ist ein Würfel.
China
Wie gross war das Volumen des ursprünglichen Quaders?

(**A**) 75 cm^3 (**B**) 125 cm^3 (**C**) 150 cm^3 (**D**) 200 cm^3 (**E**) 225 cm^3



Lösung: Durch das Verkleinern des Quaders verringert sich die Oberfläche um einen Streifen, dessen Höhe 3 cm beträgt und dessen Länge gleich dem Umfang der quadratischen Grundfläche ist.
Da der Flächeninhalt des Streifens 60 cm^2 beträgt, muss seine Länge 60 cm^2 : 3 cm = 20 cm betragen.
Daraus ergibt sich, dass die quadratische Grundfläche die Seitenlänge 20 cm : 4 = 5 cm hat. Die Kantenlängen des Quaders waren folglich 5 cm, 5 cm und 5 cm + 3 cm = 8 cm, woraus sich sein Volumen zu 5 cm · 5 cm · 8 cm = 200 cm^3 ergibt.

22. Die Buchstaben A, P und Y stehen für drei verschiedene einstellige Zahlen. Dabei gilt $Y = P+P = A+A+A$. Dann ist $P \cdot A \cdot P \cdot A \cdot Y \cdot A =$

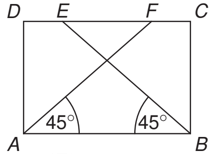
Grossbritannien

(**A**) 432 (**B**) 518 (**C**) 576 (**D**) 648 (**E**) 692

Lösung: Es gilt $Y = 2P$ und $Y = 3A$. Somit ist Y durch 2 und durch 3 teilbar. Da Y einstellig ist, muss $Y = 6$ oder $Y = 0$ gelten. Wäre $Y = 0$, so wären auch P und A gleich 0, was nicht möglich ist, da die drei Zahlen verschieden sind. Also gilt $Y = 6$, woraus $P = 3$ und $A = 2$ folgt. Damit erhalten wir $P \cdot A \cdot P \cdot A \cdot Y \cdot A = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 432$.

23. Im Rechteck $ABCD$ liegen die Punkte E und F so auf der Seite $\overline{CD}$, dass die Winkel BAF und EBA beide 45° gross sind und die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ einander schneiden. Ausserdem gilt $|AB| + |EF| = 20\,\text{cm}$.
(*Abb. nicht massstabsgerecht*)
Wie lang ist die Seite $\overline{BC}$?

Estland



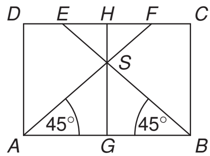
(**A**) 8 cm (**B**) 9 cm (**C**) 10 cm (**D**) 11 cm (**E**) 12 cm

Lösung: Alle Innenwinkel im Rechteck $ABCD$ sind 90° gross. Im Dreieck DAF ist der Winkel FAD daher $90° - 45° = 45°$ gross, der Winkel ADF ist 90° gross und der Winkel DFA ist somit $180° - 90° - 45° = 45°$ gross. Folglich ist das Dreieck DAF gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{AD}$ und $\overline{DF}$. Genauso ist das Dreieck CEB rechtwinklig und gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{BC}$ und $\overline{EC}$. Damit sind die Strecken $\overline{AD}$, $\overline{DF}$, $\overline{EC}$ und $\overline{BC}$ alle gleich lang.
Nun können wir die gegebene Gleichung umformen:

$$\begin{aligned} 20\,\text{cm} &= |AB| + |EF| \\ &= |DC| + |EF| \\ &= (|DE| + |EF| + |FC|) + |EF| \\ &= (|DE| + |EF|) + (|EF| + |FC|) \\ &= |DF| + |EC| \\ &= 2 \cdot |BC|\,. \end{aligned}$$

Daher gilt $|BC| = 20\,\text{cm} : 2 = 10\,\text{cm}$.

Lösungsvariante: Wir zeichnen im Bild die Senkrechte zu $\overline{AB}$ durch den Schnittpunkt S der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ ein. Alle entstandenen Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenklig. Die Dreiecke AGS und SGB sind zueinander kongruent, und ebenso die Dreiecke ESH und SFH. Nun lässt sich die Länge der Strecke $\overline{BC}$ wie folgt berechnen:



$$\begin{aligned} |BC| &= |GH| \\ &= |GS| + |SH| \\ &= |AG| + |EH| \\ &= \frac{1}{2}|AB| + \frac{1}{2}|EF| \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |EF|) \\ &= 10\,\text{cm}\,. \end{aligned}$$

Die Zahlen von 1 bis 16 sollen so in eine Reihe geschrieben werden, dass die Summe von zwei benachbarten Zahlen stets eine Quadratzahl ist.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für eine solche Reihe?

Tipp: Überleg dir zuerst für jede Zahl, welche Zahlen neben ihr stehen können, damit die Summe eine Quadratzahl ist.

24. Kanada

Vor einem Volleyballspiel haben alle Spielerinnen unterschiedlich lange trainiert. In der ersten Gruppe sind sieben Mädchen, die 1, 2, 6, 8, 10, 11 und 12 Stunden trainiert haben. In der zweiten Gruppe sind fünf Mädchen, die 3, 4, 5, 7 und 9 Stunden trainiert haben. Um zwei Teams aus jeweils sechs Spielerinnen zu bilden, wechselt Mila aus der ersten Gruppe in die zweite. Der Trainerin fällt auf, dass dadurch die durchschnittliche Trainingszeit in beiden Gruppen zunimmt. Wie lange hat Mila trainiert?

(**A**) 2 Stunden (**B**) 6 Stunden (**C**) 8 Stunden (**D**) 10 Stunden (**E**) 11 Stunden

Lösung: In der ersten Gruppe sind es durchschnittlich $\frac{1+2+6+8+10+11+12}{7} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$ und in der zweiten Gruppe durchschnittlich $\frac{3+4+5+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$ Trainingsstunden. Durch den Wechsel von Mila von der ersten in die zweite Gruppe nimmt die durchschnittliche Trainingszeit in beiden Gruppen zu. Daher muss Milas Trainingszeit kleiner sein als die durchschnittliche Trainingszeit in der ersten Gruppe und grösser als die durchschnittliche Trainingszeit in der zweiten Gruppe. Die einzige Trainingszeit aus der ersten Gruppe, die das erfüllt, ist 6 Stunden.
Übrigens sind die neuen durchschnittlichen Trainingszeiten $\frac{1+2+8+10+11+12}{6} = \frac{44}{6} = 7\frac{1}{3}$ und $\frac{3+4+5+6+7+9}{6} = \frac{34}{6} = 5\frac{2}{3}$ tatsächlich beide grösser als vor dem Wechsel.

25. Philippinen

In die 8 Kästchen sollen die 8 kleinsten Primzahlen so eingetragen werden, dass A eine ganze Zahl ist.
Wie gross kann A maximal sein?

$$A = \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{\square}$$

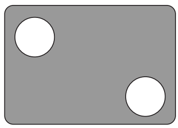
(**A**) 20 (**B**) 14 (**C**) 10 (**D**) 8 (**E**) 6

Lösung: Die 8 kleinsten Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 und 19. Damit A eine ganze Zahl ist, muss der Zähler des Bruchs durch den Nenner teilbar sein. Und A ist maximal, wenn der Nenner so klein wie möglich ist.
Eine Methode ist, die Primzahlen der Reihe nach, angefangen mit der kleinsten, als Nenner zu probieren. Die Summe aller 8 Primzahlen beträgt 77. Wir sehen, dass $77 - 2 = 75$ nicht durch 2 teilbar ist, $77 - 3 = 74$ nicht durch 3 teilbar ist und $77 - 5 = 72$ nicht durch 5 teilbar ist. Aber $77 - 7 = 70$ ist durch 7 teilbar. Damit ist $\frac{70}{7} = 10$ der grösstmögliche Wert für A.

Mit einer geschickten Überlegung kommen wir noch schneller zur Lösung: Die Summe einiger Zahlen ist genau dann durch eine Zahl P teilbar, wenn die Summe dieser Zahlen zuzüglich P durch P teilbar ist. Der Zähler des gegebenen Bruchs ist also genau dann durch den Nenner teilbar, wenn der Nenner die Summe aller 8 Primzahlen teilt. Da die Summe der 8 Primzahlen 77 ist, muss der Nenner 7 oder 11 sein. A ist maximal, wenn der Nenner 7 ist. In diesem Fall gilt $A = (77 - 7) : 7 = 10$.

26. Deutschland

Beim Fussballtraining schiesst Oskar 17-mal auf eine Torwand. Er zielt immer auf eines der beiden Löcher. Von den Schüssen auf das Loch links oben sind 60 % Treffer. Von den Schüssen auf das Loch rechts unten sind 75 % Treffer.
Wie viele von Oskars Schüssen auf das Loch rechts unten waren Treffer?



(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Die Anzahl der Schüsse auf das Loch links oben muss durch 5 teilbar sein, da 60 %, also $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, der Schüsse auf das Loch links oben Treffer sind. Die Anzahl der Schüsse auf das Loch rechts unten muss durch 4 teilbar sein, da 75 %, also $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, der Schüsse auf das Loch rechts unten Treffer sind. Da Oskar insgesamt 17-mal schiesst, sind es auf das Loch links oben 15, 10, 5 oder 0 Schüsse und auf das Loch rechts unten entsprechend $17 - 15 = 2$, $17 - 10 = 7$, $17 - 5 = 12$ bzw. $17 - 0 = 17$ Schüsse. Von diesen Zahlen ist nur 12 durch 4 teilbar, also schiesst Oskar 12-mal auf das Loch rechts unten. Von diesen 12 Schüssen sind $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ Treffer.

27. An der Tafel stehen fünf aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Ich wische zwei Zahlen mit der Summe 72 weg. Dann wische ich zwei Zahlen mit der Summe 69 weg. Welche Zahl steht nun noch an der Tafel?

Grossbritannien

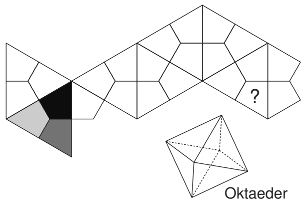
(**A**) 33 (**B**) 34 (**C**) 36 (**D**) 37 (**E**) 39

Lösung: Bei fünf aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Differenz, die zwei der fünf Zahlen haben können, höchstens 4. Von den fünf Zahlen an der Tafel haben zwei die Summe 72. Diese beiden Zahlen können folglich nur 35 und 37 oder 34 und 38 sein. Zwei andere der fünf Zahlen haben die Summe 69. Diese beiden Zahlen können nur 34 und 35 oder 33 und 36 sein. Wenn es bei der 72 die 34 und die 38 wären, so müssten es bei der 69 die 33 und die 36 sein, weil die 34 nicht zweimal vorkommen kann. Die 33 und die 38 liegen aber zu weit auseinander, deshalb ist dies nicht möglich.
Somit sind es bei der 72 die 35 und die 37 und bei der 69 die 33 und die 36, weil die 35 nicht zweimal vorkommt. An der Tafel standen folglich die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen 33, 34, 35, 36 und 37. Am Ende steht noch die 34 an der Tafel.

Welche ist die grösste natürliche Zahl, bei der jedes Paar benachbarter Ziffern eine zweistellige Quadratzahl ist?

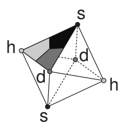
28. Amelie faltet aus dem abgebildeten Netz ein Oktaeder. Die Flächen im Netz färbt sie schwarz, dunkelgrau oder hellgrau. An jeder Ecke des Oktaeders und an jeweils gegenüberliegenden Oktaeder-Ecken sollen alle angrenzenden Flächen dieselbe Farbe haben. Wie muss Amelie die Fläche mit dem Fragezeichen färben?

Kroatien

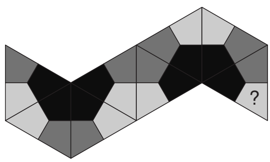


(**A**) sicher schwarz (**B**) schwarz oder dunkelgrau
(**C**) sicher dunkelgrau (**D**) dunkelgrau oder hellgrau
(**E**) sicher hellgrau

Lösung: Wegen der Symmetrie des Oktaeders können wir annehmen, dass die bereits gefärbte Seitenfläche des Netzes wie im nebenstehenden Bild im Oktaeder liegt. Die drei verschiedenfarbigen Flächen grenzen an drei verschiedene Ecken des Oktaeders. An jeder der Ecken müssen alle anderen angrenzenden Flächen ebenfalls die jeweilige Farbe haben. Auch an den gegenüberliegenden Ecken ist es dieselbe Farbe. Im Bild sind die Ecken des Oktaeders, je nach Farbe der angrenzenden Flächen, mit s für schwarz, d für dunkelgrau oder h für hellgrau beschriftet.



Damit diese Färbung möglich ist, müssen wir bei jeder der Seitenflächen des Oktaeders im Netz eine der drei Flächen schwarz, eine dunkelgrau und eine hellgrau färben.
Ausserdem müssen wir Flächen, die an dieselbe Ecke des Oktaeders angrenzen, gleich färben.
Mit diesen Überlegungen färben wir Schritt für Schritt die anderen Flächen im Netz. Dazu vervollständigen wir die unvollständige Oktaeder-Seitenfläche in der Mitte des Netzes wie im Bild rechts. Die zum Vervollständigen benötigten Flächen waren im ursprünglichen Netz ganz rechts eingezeichnet.

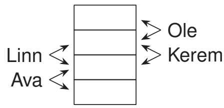


Grenzt eine Fläche an dieselbe Ecke des Oktaeders wie eine bereits gefärbte Fläche, so färben wir diese mit derselben Farbe. Sind dagegen auf einer Seitenfläche bereits zwei der drei Flächen gefärbt, so färben wir die dritte Fläche mit der noch nicht verwendeten Farbe. Auf diese Weise erhalten wir das vollständig gefärbte Netz. Die Fläche mit dem Fragezeichen müssen wir dabei hellgrau färben.

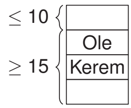
29. Kerem war mit Ava, Linn und Ole aus seiner Schule in den Ferien bei einem Mathe-Camp. Dort waren alle in einem 4-stöckigen Haus untergebracht. In höheren Stockwerken als Ava haben 25 Kinder gewohnt, in höheren als Linn waren es 10 Kinder. Unterhalb von Ole waren 5 Kinder untergebracht, und unterhalb von Kerem waren es 2 Kinder. Die Anzahl der Kinder, die oberhalb von Kerem untergebracht waren, ist ein Vielfaches der Anzahl der Kinder unterhalb von ihm. Wie viele Kinder waren insgesamt beim Mathecamp?

Vietnam

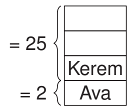
(**A**) 27 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 37 (**E**) 40



Lösung: Linn muss oberhalb von Ava gewohnt haben, weil es oberhalb von Linn weniger Kinder waren als oberhalb von Ava. Da oberhalb von Linn noch Kinder waren, kann Linn nicht höher als im 3. Stock gewohnt haben und Ava nicht höher als im 2. Stock. Genauso können wir uns überlegen, dass Kerem im 2. oder im 3. Stock gewohnt hat und Ole im 3. oder im 4. Stock.



Eine Möglichkeit ist es nun, wie folgt vorzugehen: Im 4. Stock können höchstens die 10 Kinder oberhalb von Linn gewohnt haben, und darunter haben noch mindestens $25 - 10 = 15$ weitere Kinder gewohnt, da es oberhalb von Ava 25 Kinder waren. Folglich kann Ole nicht im 4. Stock gewohnt haben, weil es unterhalb von Ole nur 5 Kinder waren. Damit muss Ole im 3. Stock gewohnt haben und Kerem im 2. Stock. Nun ist klar, dass im 1. Stock 2 Kinder gewohnt haben und im 2. Stock $5 - 2 = 3$.

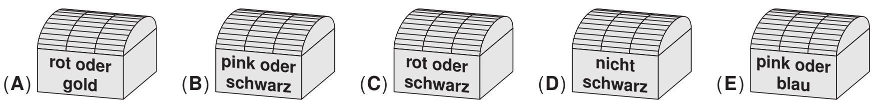


Hätte Ava wie Kerem im 2. Stock gewohnt, so wären es oberhalb von Kerem wie bei Ava 25 Kinder. Die Anzahl der Kinder oberhalb von Kerem wäre dann nicht durch die Anzahl der Kinder unterhalb vom ihm, nämlich 2, teilbar. Deshalb muss Ava im 1. Stock gewohnt haben. Somit waren im 1. Stock 2 Kinder untergebracht und in den Stockwerken darüber insgesamt 25. Die gesuchte Gesamtanzahl ist $25 + 2 = 27$.

Übrigens können wir auch feststellen, wo Linn gewohnt hat und wie viele Kinder in welchem Stockwerk untergebracht waren. Das ist rechts zu sehen. Ausserdem erkennen wir, dass oberhalb von Kerem 22 Kinder gewohnt haben, was wie gefordert durch die Anzahl der Kinder, die unterhalb von ihm untergebracht waren, teilbar ist.

30. Adira hat fünf kleine Truhen mit Perlen zum Basteln, in jeder Truhe eine Farbe: rot, gold, pink, schwarz und blau. Sie hat die Truhen wie gezeigt beschriftet. Alle Aufschriften sind korrekt. Adiras Freundin Ruby möchte wissen, in welcher Truhe die roten Perlen sind. Adira lässt sie in genau eine Truhe hineinschauen. Welche Truhe muss Ruby wählen, damit sie auf jeden Fall weiss, in welcher Truhe die roten Perlen sind?

Deutschland



Lösung: Für den Inhalt von Truhe (**D**) kommen im Unterschied zu den anderen Truhen vier Farben in Frage. In diese Truhe zu schauen, liefert möglicherweise am meisten Information.
Falls (**D**) die roten Perlen enthält, weiss Ruby direkt, wo die roten Perlen sind.
Falls (**D**) die goldenen Perlen enthält, dann weiss Ruby, dass (**A**) die roten Perlen enthält.
Falls die Perlen in (**D**) pink sind, so enthält (**B**) die schwarzen Perlen und (**C**) die roten Perlen.
Und falls (**D**) die blauen Perlen enthält, so sind die Perlen in (**E**) pink, in (**B**) schwarz und in (**C**) rot.
Wenn Ruby also Truhe (**D**) auswählt, weiss sie auf jeden Fall, in welcher Truhe die roten Perlen sind.
Wenn Ruby irgendeine der anderen Truhen wählt, gibt es mindestens eine Farbe der Perlen in der Truhe, bei der noch mehrere Möglichkeiten bleiben, in welcher Truhe sich die roten Perlen befinden können.
Wählt Ruby beispielsweise Truhe (**A**) und diese enthält nicht die roten, sondern die goldenen Perlen, dann können die roten Perlen in Truhe (**C**) oder (**D**) sein, wie die beiden Beispiele zeigen:

(**A**) gold, (**B**) schwarz, (**C**) rot, (**D**) pink, (**E**) blau

(**A**) gold, (**B**) pink, (**C**) schwarz, (**D**) rot, (**E**) blau.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Antwort	D	C	A	E	A	B

Aufgabe	7	8	9	10	11	12
Antwort	E	E	A	C	B	D

Aufgabe	13	14	15	16	17	18
Antwort	B	B	C	C	A	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	E	B	D	A	A	B	B	C

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	B	E	D	D	B	C	D	A

Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	C	C	B	E	D	A	D	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	E	B	A	B	E	B	C	A	E

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	A	C	B	D	D	D	A	B	E	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	A	C	B	C	D	B	E	A	D

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden:

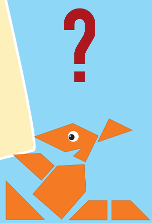
$(20+25)^2$

2025

Die Jahreszahl 2025 hat eine besondere Eigenschaft. Sie ist eine Quadratzahl, also das Produkt einer ganzen Zahl mit sich selbst. Die ersten Quadratzahlen sind 0, 1, 4, 9 und 16. Die Zahl 2025 ist gleich $45 \cdot 45$ oder 45^2, wie man kürzer schreibt.
Das nächste Mal ist die Jahreszahl im Jahr 46^2 eine Quadratzahl, also im Jahr 2116. Das ist in 91 Jahren. Nur wenige von uns werden ein zweites Mal ein Quadratzahljahr erleben.

Wer schafft es, auf der Vorderseite die drei magischen Quadrate zu vervollständigen?

Es sollen die Zahlen von 1 bis 9, von 1 bis 16 bzw. von 1 bis 25 vorkommen, und in jedem Quadrat sollen die Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen die gleiche Summe haben.



www.kaenguru-schweiz.ch
www.kangourou-suisse.ch