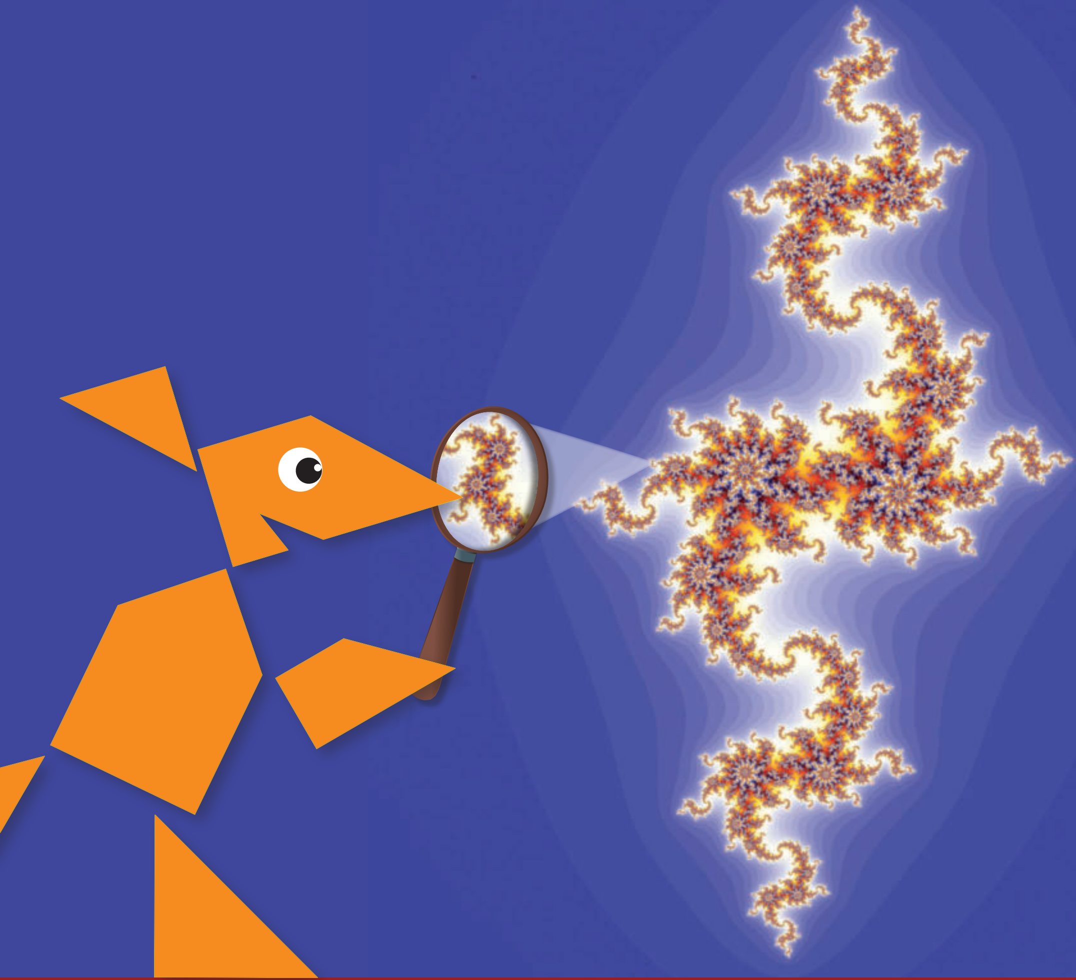
2024

Mathe mit dem Känguru



Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmende am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2024“,

Dieses Jahr haben sich in der Schweiz 990 Schulen mit insgesamt über 65 000 Teilnehmenden angemeldet. Wir haben die Teilnahme wiederum sowohl auf Papier als auch online angeboten. Letzteres erfreut sich grosser Beliebtheit! Eine technische Herausforderung ist, dass einige Tausend Nutzer am Känguru-Tag gleichzeitig auf den Server zugreifen. Ein paar Schulen haben uns gemeldet, dass sie Probleme mit der Verbindung hatten. Wir müssen leider davon ausgehen, dass es noch mehr sind, als nur diejenigen, die sich gemeldet haben. Wir bedauern diese für alle sehr unangenehme Situation und bitten die Betroffenen um Entschuldigung! Wir werden alles daran setzen, dass es nächstes Jahr für alle gut laufen wird. Eine einfache Sicherheitsmassnahme wäre es auf jeden Fall, dass die Lehrpersonen die Aufgaben auch auf Papier abgeben. Sollte es (worst case) wieder zu Verbindungsproblemen kommen, könnten die Schüler/-innen den Wettbewerb auf Papier fertig lösen.

Weltweit haben sich Kinder und Jugendliche in mehr als 100 Ländern an den Aufgaben versucht. Im internationalen Verein „Kangourou sans frontières“ arbeiten diese Länder zusammen. Die vielen hübschen oder ungewöhnlichen Fragestellungen sowie überhaupt die Vielgestaltigkeit der Aufgaben rühren daher, dass sehr unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus verschiedenen Kulturen einfliessen. In der Broschüre ist angegeben, aus welchen Ländern die Vorschläge für die Aufgaben kamen.

Känguru-Teilnehmerländer 2024

„Känguru Schweiz“ hat dieses Jahr den Wettbewerb in Deutsch, Englisch, Französisch und Rhätoromanisch angeboten, Letzteres allerdings nur für Primarschulen. Für die Übersetzungen und den online-Satz im Wettbewerbssystem danken wir herzlich den von der ETH zur Verfügung gestellten Hilfsassistentinnen Mina Camenisch und Marie Haas sowie Loïc Cellier fürs Französisch.

Diese Broschüre erhalten alle Teilnehmenden ab Klassenstufe 7, die jeweils 30 Aufgaben gestellt bekommen. Beginnend mit einer Startpunktzahl von 30 Punkten gibt es 3, 4 oder 5 Punkte pro richtige Antwort. Bei einer falschen Antwort werden entsprechend 0.75, 1 oder 1.25 Punkte abgezogen. Somit ist 0 die tiefstmögliche Gesamtpunktzahl, die höchste ist 150.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von Martin Altmann, Deindra Hanzig, Dr. Monika Noack und Alexander Unger unter Mitwirkung von Dr. Meike Akveld, Maria Cannizzo, Bertram Hell, Birgit und Ulf Hutschenreiter, Dr. Marion Jarmer, Dima Nikolenkov, Dr. Antje Noack, Angelika Rupflin, Andreas Stahel, Dr. Dorothea Vigerske, Dr. Renate Winkler und Josef Züger erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V., www.mathe-kaenguru.de
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de
Druck: Druckerei Vetters GmbH & Co. KG, Radeburg

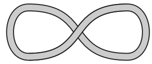
Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

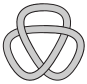
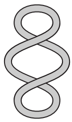
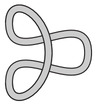
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 7 und 8

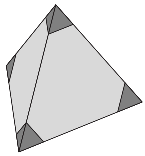
1. Welche der folgenden Schnüre kann nicht so gelegt werden wie die Schnur rechts, ohne sie zu zerschneiden?

Deutschland



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Schnur rechts lässt sich zu einem geschlossenen, nicht verdrehten Ring entwirren. Das ist auch bei den Schnüren bei (**A**), (**C**), (**D**) und (**E**) möglich. Die Schnur bei (**B**) kann nicht so gelegt werden, da ein Knoten entsteht, wenn wir an einer der drei Schlaufen ziehen.



2. Julio schneidet wie abgebildet die vier Ecken eines Tetraeders ab. Wie viele Ecken hat der Körper, der übrig bleibt?

Deutschland

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Durch das Abschneiden werden die 4 Ecken des Tetraeders entfernt und an jeder Schnittfläche entstehen 3 neue Ecken. Der Körper, der übrig bleibt, hat also $4 \cdot 3 = 12$ Ecken.

3. $(20 \cdot 24) : (2 \cdot 0 + 2 \cdot 4) =$

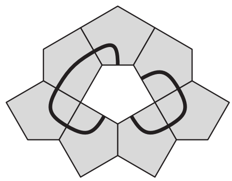
Uganda

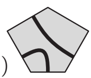
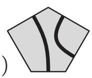
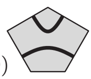
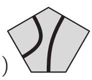
(**A**) 12 (**B**) 30 (**C**) 48 (**D**) 60 (**E**) 120

Lösung: Es ist $(20 \cdot 24) : (2 \cdot 0 + 2 \cdot 4) = 20 \cdot 24 : 8 = 20 \cdot 3 = 60$.

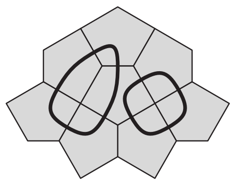
4. Welches der folgenden Teile passt so in die Mitte des Puzzles, dass dabei zwei geschlossene Linien entstehen?

Slowenien



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Teile passen in die Mitte des Puzzles, wenn sie auf den Kopf gedreht werden. Nur das Teil bei (**E**) hat links einen Bogen um eine Ecke und rechts einen längeren Bogen um zwei Ecken, sodass die beiden angefangenen Linien im Puzzle geschlossen werden.



5. Das Maximalgewicht, das der Aufzug in der Jugendherberge tragen kann, ist mit 12 Erwachsenen oder mit 20 Kindern erreicht. Wie viele Kinder dürfen den Aufzug zusammen mit 9 Erwachsenen benutzen?

Ukraine

(**A**) höchstens 3 (**B**) höchstens 4 (**C**) höchstens 5 (**D**) höchstens 6 (**E**) höchstens 7

Lösung: Wenn 9 Erwachsene mit dem Aufzug fahren, sind drei Viertel des Maximalgewichts, das der Aufzug tragen kann, erreicht. Ein Viertel des Maximalgewichts bleibt dann für Kinder. Also können noch $20 : 4 = 5$ Kinder mitfahren.

6. Familie Backe hat für nächsten Donnerstag fünf Termine beim Zahnarzt vereinbart. Sie haben in einer Tabelle angekreuzt, wer zu welchen Terminen Zeit hat. Tatsächlich können die fünf Termine für alle passend aufgeteilt werden. Wann wird Nils an der Reihe sein?

Schweiz

(**A**) 13:00 (**B**) 14:00 (**C**) 15:00 (**D**) 16:00 (**E**) 17:00

	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
Anne		×			
Nils	×	×	×	×	
Caro	×		×	×	×
Mama		×	×	×	
Papa		×	×		

Lösung: Wer erkennt, dass der Termin um 17:00 Uhr nur für Caro passt, der sieht schnell, dass der Termin um 13:00 Uhr dann nur für Nils passt. Also ist Nils um 13:00 Uhr an der Reihe.
Wer eher auf die Personen schaut als auf die Termine, sieht zuerst, dass Anne den Termin um 14:00 Uhr bekommen muss. Dann muss Papa den Termin um 15:00 Uhr und Mama den Termin um 16:00 Uhr bekommen. Somit ist Nils um 13:00 Uhr an der Reihe und Caro um 17:00 Uhr.

7. Margarethe möchte mit den drei abgebildeten Karten vierstellige Zahlen legen. Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen sind möglich?

Niederlande

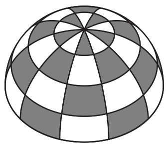
1 5 11

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Margarethe kann die Karte mit der 5 nach links, in die Mitte oder nach rechts legen. Liegt die 5 links, entsteht die Zahl 5111, egal in welcher Reihenfolge die beiden anderen Karten liegen. Liegt die 5 in der Mitte, entsteht die Zahl 1511 oder die Zahl 1151, je nachdem in welcher Reihenfolge die beiden anderen Karten liegen. Liegt die 5 rechts, entsteht die Zahl 1115, egal in welcher Reihenfolge die beiden anderen Karten liegen. Es sind 4 Zahlen möglich.

8. Elizas rundes Zelt ist rundherum gleichmässig gemustert. Die einzelnen Flächen sind abwechselnd weiss und grau. Wie viele graue Flächen hat Elizas Zelt?

Griechenland



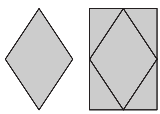
(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 22 (**D**) 25 (**E**) 27

Lösung: Von den 10 Flächen oben in der Mitte sind 5 grau und 5 weiss. Da die einzelnen Flächen auf dem Zelt abwechselnd grau und weiss sind, gibt es ebenso in jedem der 3 Ringe, die rund um das Zelt führen, 5 graue und 5 weisse Flächen. Daher sind es insgesamt $4 \cdot 5 = 20$ graue Flächen.

Wie viele 4-stellige Zahlen bestehen wie die Jahreszahl 2024 aus 4 geraden Ziffern, die in der Summe 8 ergeben?

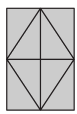
9. An einen Rhombus wurden vier zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke angelegt. So ist ein Rechteck entstanden. Um wie viel Prozent ist die Fläche des Rechtecks grösser als die Fläche des Rhombus?

Spanien



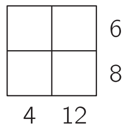
(**A**) um 40 % (**B**) um 60 % (**C**) um 75 % (**D**) um 80 % (**E**) um 100 %

Lösung: Wir können das Rechteck in 8 kongruente Dreiecke zerlegen. Von diesen gehören 4 zum Rhombus. Zum Rechteck gehören 4 Dreiecke mehr als zum Rhombus. Die Fläche des Rechtecks ist damit um 100 % grösser als die Fläche des Rhombus.



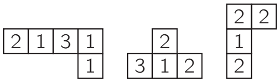
10. In die Kästchen der Figur rechts sollen <u>vier verschiedene</u> natürliche Zahlen eingetragen werden. Neben jeder Zeile und unter jeder Spalte ist angegeben, welches Produkt die beiden Zahlen in der jeweiligen Zeile bzw. Spalte haben sollen. Wie gross ist die Summe der vier Zahlen, die einzutragen sind?

Australien



(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

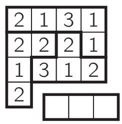
Lösung: Wir beginnen mit der linken Spalte. Die einzige Möglichkeit, die 4 ohne Beachtung der Reihenfolge als Produkt von zwei verschiedenen natürlichen Zahlen zu schreiben, ist $4 = 1 \cdot 4$. Somit müssen wir in die linke Spalte eine 1 und eine 4 eintragen. Die 4 kann nicht im oberen Kästchen stehen, da 4 kein Teiler von 6 ist. Also steht im Kästchen oben links die 1, unten links die 4 und folglich oben rechts $6 : 1 = 6$ und unten rechts $8 : 4 = 2$. Damit ist auch das Produkt in der rechten Spalte wie gefordert $6 \cdot 2 = 12$. Die vier einzutragenden Zahlen haben die Summe $1 + 4 + 6 + 2 = 13$.

11. Aus den drei Teilen  und einem weiteren Teil kann ein 4×4-Quadrat gelegt werden, bei dem die Summe der Zahlen in jeder der vier Zeilen und in jeder der vier Spalten dieselbe ist. Wie sieht das vierte Teil aus?

Deutschland

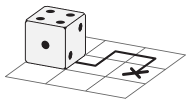
(**A**) 2 1 0 (**B**) 1 2 1 (**C**) 1 1 3 (**D**) 2 2 3 (**E**) 0 3 2

Lösung: Die drei gegebenen Teile können nur auf eine Weise so zusammengelegt werden, dass eines der Teile aus den Antwortmöglichkeiten Platz hat (siehe Bild). Im ersten der gegebenen Teile ist eine vollständige Zeile mit der Summe $2+1+3+1 = 7$ enthalten. Also ist im fertigen 4×4-Quadrat die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte 7. Damit die Summe der Zahlen in der 2., 3. und 4. Spalte 7 ist, müssen auf dem vierten Teil 1, 1 und 3 stehen. Das gesuchte Teil ist also das Teil bei (**C**).



12. Auf einem Spielwürfel ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Augenzahlen stets 7. Jamie bewegt den Würfel auf dem gezeichneten Weg, indem er ihn über seine Kanten kippt. Am Anfang ist die 4 oben. Welche Augenzahl ist oben, wenn der Würfel am Ende des Weges angelangt ist?

Spanien



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Diese Aufgabe lässt sich gut lösen, indem wir den Weg des Würfels rückwärts verfolgen. Die Augenzahl, die am Ende oben liegt, lag vor dem vierten Kippen hinten. Vor dem dritten Kippen lag sie ebenfalls hinten. Vor dem zweiten Kippen lag sie oben. Folglich lag sie vor dem ersten Kippen links und damit gegenüber der 2. Die gesuchte Zahl ist also die 5.
Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir uns von vorn beginnend entlang des Weges überlegen, wie der Würfel nach jedem Kippen ausgerichtet ist.

Wer wissen will, wie der Würfel in Aufgabe 12 liegen kann, wenn er zurück auf sein Startfeld gekippt wird, findet auf Seite **??** *die Antwort auf diese Frage.*

13. Maria, Yegor und Leela stellen sich vor, wie sie in der Zukunft mit selbstfliegenden Flugtaxis fliegen. Angenommen, es gäbe ein rotes und ein blaues Flugtaxi, in denen jeweils 2 Personen Platz haben. Wie viele Möglichkeiten gäbe es für die Drei, sich auf die beiden Flugtaxis aufzuteilen?

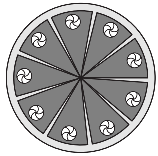
Saudi-Arabien

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 9

Lösung: Wenn sich Maria, Yegor und Leela auf die zwei Flugtaxis aufteilen, fliegt immer genau einer der Drei allein. Die beiden anderen fliegen mit dem anderen Flugtaxi. Es gibt 3 Möglichkeiten dafür, dass mit dem roten Flugtaxi einer allein fliegt, und ebenso 3 Möglichkeiten dafür, dass mit dem blauen Flugtaxi einer allein fliegt. Das sind insgesamt $3+3=6$ Möglichkeiten.

14. Denise hat einen Kuchen gebacken und ihn in 10 gleich grosse Stücke geschnitten. Ein Stück hat sie gleich aufgegessen. Die übrigen Stücke hat sie so angeordnet, dass die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich gross sind. Wie gross ist jeweils der Winkel zwischen zwei benachbarten Stücken?

Deutschland



(**A**) 1° (**B**) 2° (**C**) 3° (**D**) 4° (**E**) 5°

Lösung: Die 10 Kuchenstücke sind gleich gross. Somit ist der Winkel an der Spitze jedes Kuchenstücks $360° : 10 = 36°$ gross. Da nun ein Stück fehlt, ist die Summe der 9 Winkel zwischen zwei benachbarten der restlichen 9 Stücke gleich 36°. Und da die 9 Stücke so angeordnet sind, dass die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich gross sind, ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Stücken jeweils $36° : 9 = 4°$ gross.

15. Marta möchte auf dem Kühlschrank mit dreieckigen Zahlenmagneten das Datum an jedem Tag des Jahres darstellen können. Dafür möchte sie jeweils vier Zahlenmagnete mit jeweils einer Ziffer verwenden. Die Magnete sollen mit einer Spitze nach oben zeigen und die Zahlen aufrecht zu lesen sein. Was ist die kleinste Anzahl von Magneten, mit denen sie das schaffen kann?

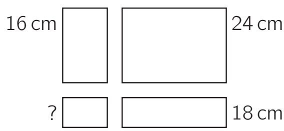
Spanien

(**A**) 24 (**B**) 23 (**C**) 22 (**D**) 21 (**E**) 20

Lösung: Marta benötigt für jede Ziffer mindestens zwei Magnete, weil es für jede Ziffer ein Datum gibt, an dem diese gleichzeitig beim Tag und beim Monat als Einerziffer vorkommt. Zum Beispiel für die Ziffer 9 am 09.09. Die Ziffern von 4 bis 9 können weder beim Tag noch beim Monat als Zehnerziffer vorkommen, deshalb reichen für diese Ziffern jeweils zwei Magnete aus.
Die Ziffer 3 kann beim Monat nicht als Zehnerziffer vorkommen, aber beim Tag. Wenn sie beim Tag als Zehnerziffer vorkommt, dann kann sie beim Tag nicht auch noch als Einerziffer vorkommen, weil es keinen 33. gibt. Deshalb reichen zwei Magnete mit der Ziffer 3 aus.
Marta benötigt drei Magnete mit der Ziffer 2 um den 22.12. darzustellen, aber keinen vierten, weil die Zehnerziffer beim Monat keine 2 sein kann.
Marta benötigt vier Magnete mit der Ziffer 1, um den 11.11. darzustellen.
Die Ziffer 0 kann zwar an allen Positionen vorkommen, aber weder beim Tag noch beim Monat gleichzeitig an der Einer- und der Zehnerstelle. Daher reichen zwei Magnete mit der Ziffer 0 aus.
Insgesamt sind das $8 \cdot 2 + 3 + 4 = 23$ Magnete.

16. Per hat ein grosses Rechteck in vier kleinere Rechtecke zerschnitten. Der Umfang von drei der kleinen Rechtecke ist im Bild angegeben. Welchen Umfang hat das vierte kleine Rechteck?

Niederlande



(**A**) 6 cm (**B**) 8 cm (**C**) 10 cm (**D**) 12 cm (**E**) 14 cm

Lösung: Sowohl bei den beiden oberen als auch bei den beiden unteren Rechtecken sind die Längen der vertikalen Seiten gleich und die Längen der beiden horizontalen Seiten unterscheiden sich in Summe genau um so viel wie die beiden Umfänge. Also ist der gesuchte Umfang um $24\,\text{cm} - 16\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$ kürzer als der Umfang des Rechtecks rechts unten. Er beträgt folglich $18\,\text{cm} - 8\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$.
Wer sieht, dass sich aus den Seiten von zwei jeweils diagonal gegenüberliegenden kleinen Rechtecken genau der Umfang des grossen Rechtecks zusammensetzen lässt, kann den gesuchten Umfang als $(16\,\text{cm} + 18\,\text{cm}) - 24\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$ berechnen.
Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, für eine der Seiten eines der kleinen Rechtecke eine Seitenlänge festzulegen (mit einem Zahlenwert oder einer Variablen) und alle anderen Seitenlängen der kleinen Rechtecke und schliesslich den gesuchten Umfang damit zu bestimmen.

17. Nicos Opa hat Ravioli gemacht. Nico hat sie so auf 6 Teller verteilt, dass auf allen gleich viele Ravioli sind. „Jeder sollte erst einmal eine kleinere Portion bekommen“, sagt Nicos Oma und nimmt von jedem Teller 3 Ravioli wieder herunter. Nico stellt fest: „Du hast insgesamt so viele Ravioli heruntergenommen, wie vorher zusammen auf 2 Tellern lagen.“ Wie viele Ravioli liegen nun auf jedem Teller?

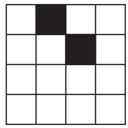
Ungarn

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Nicos Oma hat von 6 Tellern je 3 Ravioli heruntergenommen, also insgesamt $6 \cdot 3 = 18$. So viele Ravioli lagen vorher zusammen auf 2 Tellern. Also waren es vorher auf jedem Teller $18 : 2 = 9$ Ravioli. Jetzt liegen auf jedem Teller 3 Ravioli weniger, das heisst $9 - 3 = 6$.

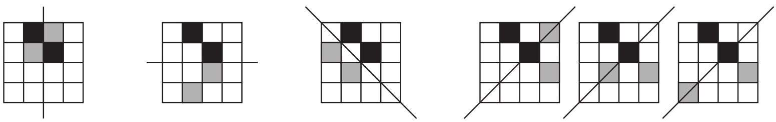
18. Im rechts abgebildeten Quadrat möchte Aila zwei weitere Kästchen schwarz ausmalen, sodass das Quadrat anschliessend eine Symmetrieachse besitzt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Aila dafür?

China

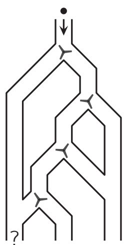


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Ein Quadrat hat 4 Symmetrieachsen. Für die vertikale Symmetrieachse müssen die beiden Kästchen ausgemalt werden, die zu den bereits ausgemalten Kästchen symmetrisch liegen. Dies gilt ebenso für die horizontale Symmetrieachse und für die diagonale Symmetrieachse, die von links oben nach rechts unten verläuft.
Für die vierte Symmetrieachse steht nur ein Kästchen fest, das sicher ausgemalt werden muss. Als zweites Kästchen muss ein Kästchen ausgemalt werden, das zu sich selbst symmetrisch ist, das heisst auf der Symmetrieachse liegt – dafür gibt es 3 Möglichkeiten. Insgesamt sind es 6 Möglichkeiten.



In die abgebildete Kugelbahn werden oben 16 Kugeln nacheinander eingefüllt. Jedes Kipprädchen lässt die Kugeln immer abwechselnd nach links oder nach rechts fallen. Wie viele der 16 Kugeln kommen beim Ausgang links unten an?



19. Ein Känguru springt einen Berg hinauf und dann auf demselben Weg zum Startpunkt zurück. Bergauf springt es mit jedem Sprung 1 m weit. Bergab legt es mit jedem Sprung 3 m zurück. Insgesamt macht das Känguru 2024 Sprünge. Welchen Weg legt das Känguru dabei insgesamt zurück?

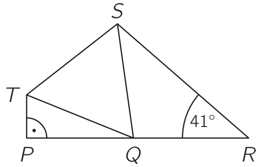
Österreich

(**A**) 5060 m (**B**) 4284 m (**C**) 3542 m (**D**) 3036 m (**E**) 2530 m

Lösung: Das Känguru springt bergab mit jedem Sprung 3-mal so weit wie bergauf. Da es bergauf und bergab dieselbe Strecke zurücklegt, macht es folglich bergauf 3-mal so viele Sprünge wie bergab. Bergab findet also ein Viertel aller Sprünge statt, das sind $2024 : 4 = 506$ Sprünge. Bei jedem Sprung bergab legt das Känguru 3 m zurück, der Weg bergab ist also $506 \cdot 3\,\text{m} = 1518\,\text{m}$ lang. Der Weg bergauf ist derselbe, also auch 1518 m lang. Das Känguru legt insgesamt $2 \cdot 1518\,\text{m} = 3036\,\text{m}$ zurück.

20. In der Figur rechts liegen die Punkte P, Q und R auf einer Geraden. Das Dreieck PQT ist rechtwinklig. Das Dreieck QST ist <u>gleichseitig</u>. Das Dreieck QRS ist gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{QR}$ und $\overline{QS}$. Der Winkel SRQ ist 41° gross. Wie gross ist der Winkel PTS?

Grossbritannien

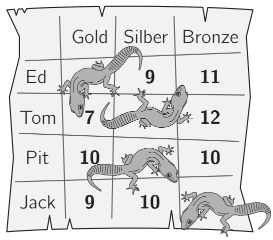


(**A**) 129° (**B**) 128° (**C**) 127° (**D**) 126° (**E**) 125°

Lösung: Der Winkel PTS ist ein Innenwinkel im Viereck $PRST$. Wir berechnen seine Grösse mithilfe der Innenwinkelsumme, die im Viereck 360° beträgt.
Im gleichschenkligen Dreieck QRS sind die Winkel SRQ und QSR Basiswinkel, das heisst gleich gross. Der Winkel QSR ist also 41° gross. Da das Dreieck QST gleichseitig ist, sind seine Innenwinkel alle 60° gross. Folglich haben im Viereck $PRST$ die Innenwinkel an den Ecken P, R und S die Grössen 90°, 41° und $41° + 60° = 101°$. Der Winkel PTS ist also $360° - 90° - 41° - 101° = 128°$ gross.
Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir nacheinander alle Innenwinkel der Dreiecke bestimmen. Der Winkel RQS ist ein Innenwinkel im gleichschenkligen Dreieck RSQ und $180° - 2 \cdot 41° = 98°$ gross. Der Winkel TQP ist $180° - 60° - 98° = 22°$ gross, da die Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen. Der Winkel PTQ ist ein Innenwinkel im Dreieck PQT und $180° - 90° - 22° = 68°$ gross. Der gesuchte Winkel PTS ist schliesslich $68° + 60° = 128°$ gross.

21. Vier Piraten haben bei Kerzenschein gezählt, wie viele Gold-, Silber- und Bronzemünzen sie erbeutet haben. Als Kapitän Flint spät in der Nacht kontrollieren will, huschen vier neugierige Geckos schnell von den Notizen. Nur einer der Piraten hat alles richtig gezählt. Die anderen haben bei jeder Sorte falsch gezählt. Insgesamt sind es 30 Münzen. Wie viele Goldmünzen haben die Piraten erbeutet?

Griechenland

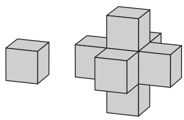


(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

Lösung: Wenn Ed richtig gezählt hätte, dann müsste er $30 - 9 - 11 = 10$ Goldmünzen gezählt haben, genauso viele wie Pit. Da die anderen Piraten aber bei allen Sorten falsch gezählt haben, kann Ed nicht richtig gezählt haben. Hätte Tom richtig gezählt, dann wären es bei ihm $30 - 7 - 12 = 11$ Silbermünzen. Die Münzzahlen bei den anderen Piraten, egal ob mit oder ohne Gecko darauf, könnten sich bei allen Sorten von den Zahlen bei Tom unterscheiden. Deshalb ist es möglich, dass Tom richtig gezählt hat. Hätte Pit richtig gezählt, dann müsste er $30 - 10 - 10 = 10$ Silbermünzen gezählt haben, genauso viele wie Jack. Und hätte Jack richtig gezählt, dann müsste er $30 - 9 - 10 = 11$ Bronzemünzen gezählt haben, genauso viele wie Ed. Weil die anderen Piraten aber bei allen Sorten falsch gezählt haben, können Pit und Jack nicht richtig gezählt haben. Der einzig mögliche Fall ist, dass Tom richtig gezählt hat. Da er 7 Goldmünzen gezählt hat, haben die Piraten 7 Goldmünzen erbeutet.

22. Amir hat viele gleich grosse Würfel. Er nimmt einen Würfel und klebt 6 Würfel so an, dass alle seine Seitenflächen vollständig verdeckt sind. Nun möchte er an den neuen Körper zusätzliche Würfel so kleben, dass dessen Seitenflächen alle verdeckt sind. Wie viele zusätzliche Würfel benötigt Amir dafür <u>mindestens</u>?

Brasilien



(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Von jedem der äusseren 6 Würfel sind 5 Seitenflächen zu verdecken, also insgesamt $6 \cdot 5 = 30$. Für die 6 äusseren Seitenflächen benötigen wir dafür 6 zusätzliche Würfel. Von den anderen $30 - 6 = 24$ Seitenflächen verdecken wir mit einem zusätzlichen Würfel stets 2 Seitenflächen gleichzeitig. Für diese brauchen wir demzufolge $24 : 2 = 12$ zusätzliche Würfel. Insgesamt werden somit $6 + 12 = 18$ zusätzliche Würfel benötigt.

23. Auf einem Foto von Milenas 9. Geburtstag sind alle Gäste zu sehen. Jedes Kind hat die Arme oben und zeigt 9 Finger. Mit den linken Händen zeigen sie insgesamt 26 Finger. Wie viele Finger zeigen sie mit den rechten Händen insgesamt?

Grossbritannien

(**A**) 19 (**B**) 25 (**C**) 28 (**D**) 32 (**E**) 37

Lösung: Jedes Kind zeigt mit einer Hand 5 Finger und mit der anderen Hand 4 Finger. Wir wollen zuerst herausfinden, wie viele Kinder mit der linken Hand 5 Finger und wie viele 4 Finger zeigen. Da 26 nicht durch 4 teilbar ist, ist ganz sicher ein Kind dabei, das 5 Finger zeigt. Da $26 - 5 = 21$ nicht durch 4 teilbar ist, zeigt ganz sicher ein weiteres Kind 5 Finger. Da $21 - 5 = 16$ durch 4 teilbar ist, $16 = 4 \cdot 4$, können 4 Kinder jeweils 4 Finger zeigen. Da keine der Zahlen $(16 - 5 =)\ 11$, $(11 - 5 =)\ 6$ und $(6 - 5 =)\ 1$ durch 4 teilbar ist, ist eindeutig bestimmt, dass mit den linken Händen 2 Kinder 5 Finger und 4 Kinder 4 Finger zeigen. Es sind also 6 Kinder. Mit den rechten Händen zeigen 2 Kinder 4 Finger und 4 Kinder 5 Finger. Das sind insgesamt $2 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 28$ Finger.

24. Ilona verkauft auf dem Markt rote und gelbe Äpfel. Sie hat 6 Körbe mit 6, 8, 11, 12, 14 und 16 Äpfeln. Der erste Kunde kauft gleich einen kompletten Korb. Jetzt sind noch doppelt so viele rote wie gelbe Äpfel vorhanden. Wie viele Äpfel hat der Kunde gekauft?

Ungarn

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

Lösung: Da nach dem ersten Kunden doppelt so viele rote wie gelbe Äpfel vorhanden sind, ist die Anzahl der verbliebenen Äpfel durch 3 teilbar. Am Anfang waren es insgesamt $6+8+11+12+14+16 = 67$ Äpfel. Da 67 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, muss auch die gekaufte Anzahl Äpfel bei Division durch 3 den Rest 1 lassen. Von den Zahlen 6, 8, 11, 12, 14 und 16 lässt nur 16 bei Division durch 3 den Rest 1. Folglich hat der Kunde 16 Äpfel gekauft.
Enthalten alle Körbe nur entweder rote oder gelbe Äpfel, so sind nach dem Kauf die gelben Äpfel in den Körben mit 6 und 11 Äpfeln (insgesamt 17 gelbe Äpfel) und die roten Äpfel in den Körben mit 8, 12 und 14 Äpfeln (insgesamt $34 = 2 \cdot 17$ rote Äpfel). Es ist aber auch möglich, dass die Körbe nicht sortenrein sind. In jedem Fall sind nach dem ersten Kunden noch 17 gelbe und 34 rote Äpfel vorhanden.

Wer kann die Ziffern von 0 bis 6 so auf die leeren Kästchen verteilen, dass das Ergebnis der Rechnung die Jahreszahl 2024 ist?

$$\boxed{}\,\boxed{} \cdot \boxed{}\,\boxed{} + \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{} = \boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{4}$$

25. Sieben Karten mit den Zahlen von 1 bis 7 werden verdeckt auf den Tisch gelegt. David, Anastasia und Lennox nehmen jeweils zwei der Karten.

Vietnam

David stellt fest: „Eine meiner beiden Zahlen ist um 5 grösser als die andere.“
Anastasia stellt fest: „Die Summe meiner beiden Zahlen ist 6.“
Lennox stellt fest: „Eine meiner beiden Zahlen ist doppelt so gross wie die andere.“

Welche Zahl steht auf der Karte, die noch auf dem Tisch liegt?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

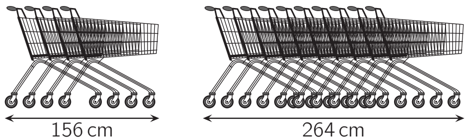
Lösung: Wir überlegen uns zunächst für jedes Kind einzeln, welche zwei Karten es auf der Hand haben könnte:

David hat: 1 und 6 <u>oder</u> 2 und 7.
Anastasia hat: 1 und 5 <u>oder</u> 2 und 4.
Lennox hat: 1 und 2 <u>oder</u> 2 und 4 <u>oder</u> 3 und 6.

Entweder hat David die 1 und Anastasia die 2 oder David hat die 2 und Anastasia die 1. Das heisst, dass ganz sicher einer der beiden die 1 und der andere die 2 hat. Da Lennox somit keine 1 und keine 2 haben kann, muss er 3 und 6 haben. Folglich hat David 2 und 7 und Anastasia hat 1 und 5. Die 4 liegt noch auf dem Tisch.

26. Vier ganz ineinandergeschobene Einkaufswagen sind 156 cm lang, und zehn ganz ineinandergeschobene Einkaufswagen sind 264 cm lang. Wie lang ist ein solcher Einkaufswagen?

Portugal

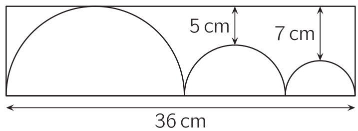


(**A**) 94 cm (**B**) 96 cm (**C**) 98 cm (**D**) 100 cm (**E**) 102 cm

Lösung: Eine Einkaufswagenschlange verlängert sich mit jedem weiteren Einkaufswagen um dieselbe Länge, sagen wir x. Die Einkaufswagenschlange aus 10 Einkaufswagen enthält 6 Einkaufswagen mehr als die Einkaufswagenschlange aus 4 Einkaufswagen. Folglich ist sie um die Länge $6x$ länger, das heißt, es gilt $156\,\text{cm} + 6x = 264\,\text{cm}$, woraus $x = (264\,\text{cm} - 156\,\text{cm}) : 6 = 18\,\text{cm}$ folgt. Entfernen wir 3 Einkaufswagen aus der Einkaufswagenschlange aus 4 Einkaufswagen, bleibt ein einzelner Einkaufswagen übrig. Ein Einkaufswagen ist also $156\,\text{cm} - 3x = 156\,\text{cm} - 3 \cdot 18\,\text{cm} = 102\,\text{cm}$ lang.

27. Drei Halbkreise berühren einander und das Rechteck, dessen längere Seite 36 cm lang ist. Die Abstände des mittelgrossen und des kleinen Halbkreises zur oberen langen Rechtecksseite betragen 5 cm und 7 cm. Wie gross ist der Umfang des Rechtecks? (*Abbildung nicht massstabsgerecht*)

Spanien

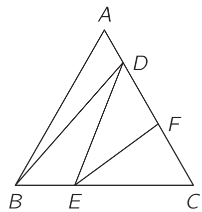


(**A**) 90 cm (**B**) 92 cm (**C**) 94 cm (**D**) 96 cm (**E**) 98 cm

Lösung: Wir bezeichnen die Länge der kürzeren Rechtecksseite mit r, was gleichzeitig der Radius des grössten Halbkreises ist. Im Bild lesen wir ab, dass der Radius des mittelgrossen Halbkreises $r - 5\,\text{cm}$ und der Radius des kleinen Halbkreises $r - 7\,\text{cm}$ ist.
Da die Durchmesser der Halbkreise zusammen genauso lang sind wie die lange Rechtecksseite, gilt $36\,\text{cm} = 2r + 2\cdot(r - 5\,\text{cm}) + 2\cdot(r - 7\,\text{cm})$. Daraus folgt $6r = 60\,\text{cm}$, das heisst, $r = 10\,\text{cm}$. Der Umfang des Rechtecks ist somit $2 \cdot 36\,\text{cm} + 2r = 72\,\text{cm} + 20\,\text{cm} = 92\,\text{cm}$ gross.

28. Das gleichseitige Dreieck ABC hat eine Seitenlänge von 120 cm. Auf den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ liegen die Punkte D, E und F so, dass die Strecken $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EF}$ das Dreieck in 4 kleinere Dreiecke teilen, die denselben Flächeninhalt haben. (*Abbildung nicht massstabsgerecht*)
Welche Länge hat die Strecke $\overline{CF}$?

China

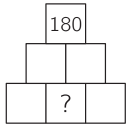


(**A**) 45 cm (**B**) 46 cm (**C**) 47 cm (**D**) 48 cm (**E**) 49 cm

Lösung: Da die 4 kleineren Dreiecke denselben Flächeninhalt haben, ist der Flächeninhalt des Dreiecks BDA ein Viertel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Die Dreiecke BDA und ABC haben dieselbe Höhe auf die Grundseiten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{AC}$. Bezeichnen wir diese Höhe mit h_1, so erhalten wir mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke $\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_1$. Daraus folgt $|AD| = \frac{1}{4} \cdot |AC|$, also $|AD| = \frac{1}{4} \cdot 120\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Die Strecke $\overline{CD}$ ist somit $120\,\text{cm} - 30\,\text{cm} = 90\,\text{cm}$ lang.
Dasselbe Prinzip wenden wir auf die beiden Dreiecke ECF und EFD an. Sie haben denselben Flächeninhalt und dieselbe Höhe auf die Grundseiten $\overline{CF}$ bzw. $\overline{DF}$. Bezeichnen wir diese Höhe mit h_2, so erhalten wir mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke $\frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot h_2$. Daraus folgt $|CF| = |DF|$. Also ist die Strecke $\overline{CF}$ halb so lang wie die Strecke $\overline{CD}$, das heisst $90\,\text{cm} : 2 = 45\,\text{cm}$.

29. Türkei

Donggyu möchte in jedes Kästchen der Figur eine natürliche Zahl schreiben. Dabei soll das Produkt zweier waagerecht benachbarter Zahlen stets in dem Kästchen direkt darüber stehen. Ganz oben steht die Zahl 180. Wie viele verschiedene Zahlen grösser als 1 können in dem Kästchen mit dem Fragezeichen stehen?



(**A**) 8 (**B**) 6 (**C**) 5 (**D**) 3 (**E**) 2

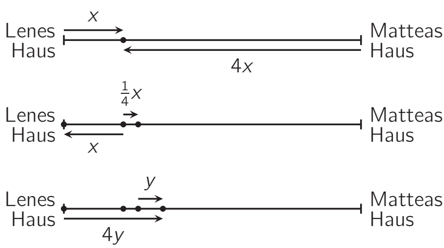
Lösung: Die Zahl im Kästchen mit dem Fragezeichen bezeichnen wir mit x und die beiden anderen Zahlen in der unteren Zeile der Figur mit a und b. Dann stehen in der mittleren Zeile der Figur die Zahlen $a \cdot x$ und $b \cdot x$ und ganz oben $a \cdot x \cdot b \cdot x = a \cdot b \cdot x^2$. Also gilt $180 = a \cdot b \cdot x^2$. Wir müssen also herausfinden, welche Quadratzahlen größer als 1 Teiler von 180 sind. Dazu zerlegen wir 180 in Primfaktoren: $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. In einer Quadratzahl grösser als 1 kommt jeder Primfaktor in einer geraden Anzahl vor. Die einzigen Quadratzahlen, die grösser als 1 und Teiler von 180 sind, sind somit 2^2, 3^2 und $2^2 \cdot 3^2 = 6^2$. Also kann x nur eine der Zahlen 2, 3 und 6 sein. Das sind 3 verschiedene Zahlen.
Die jeweils anderen Primfaktoren von 180 können beliebig auf die beiden äusseren Kästchen in der unteren Reihe aufgeteilt werden, wobei in einem Kästchen auch die Zahl 1 stehen kann.

30. Moldawien

Lene fährt mit dem Trottinett von ihrem Haus zu Matteas Haus und sofort wieder zurück. Mattea fährt mit dem Fahrrad von ihrem Haus zu Lenes Haus und sofort wieder zurück. Lene und Mattea fahren auf derselben Strecke, starten zur selben Zeit und fahren jeweils mit konstanter Geschwindigkeit. Mit dem Fahrrad ist Mattea viermal so schnell wie Lene mit dem Trottinett. Zum ersten Mal treffen sich Lene und Mattea 18 min nach dem Start. Wie lange nach dem Start treffen sie sich zum zweiten Mal?

(**A**) 24 min (**B**) 25 min (**C**) 27 min (**D**) 28 min (**E**) 30 min

Lösung: Wir bezeichnen die Länge des Weges, den Lene von ihrem Haus bis zum ersten Treffpunkt zurücklegt, mit x. Mattea ist viermal so schnell wie Lene und somit ist die Länge des Weges von ihrem Haus bis zum ersten Treffpunkt $4x$. Nach dem ersten Treffpunkt legt Mattea bis zu Lenes Haus einen Weg der Länge x zurück. Da Mattea viermal so schnell wie Lene ist, legt Lene in dieser Zeit einen Weg der Länge $\frac{1}{4}x$ zurück. Lene befindet sich nun $x + \frac{1}{4}x = \frac{5}{4}x$ von ihrem Haus entfernt.
Nun fahren beide Mädchen in dieselbe Richtung. Wir bezeichnen die Länge des Weges, den Lene nun noch bis zum zweiten Treffpunkt zurücklegt, mit y. Da Mattea viermal so schnell ist, muss sie bis zum zweiten Treffpunkt $4y$ zurücklegen. Somit ist der zweite Treffpunkt von Lenes Haus einerseits $\frac{5}{4}x + y$ und anderseits $4y$ entfernt. Also gilt $\frac{5}{4}x + y = 4y$. Daraus folgt $3y = \frac{5}{4}x$, das heisst $y = \frac{5}{12}x$.



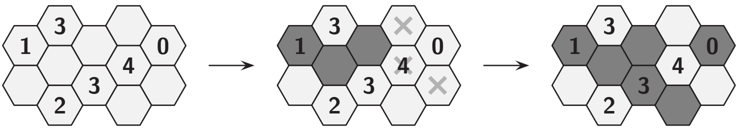
Somit ist der zweite Treffpunkt von Lenes Haus $x + \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}x = \frac{20}{12}x = \frac{5}{3}x$ entfernt. Das ist genau die Strecke, die Lene vom Start bis zum zweiten Treffpunkt fährt. Da sie für eine Strecke der Länge x 18 min braucht, erreicht sie den zweiten Treffpunkt also nach $\frac{5}{3} \cdot 18\,\text{min} = 5 \cdot 6\,\text{min} = 30\,\text{min}$.
Die beiden Mädchen treffen sich 30 min nach dem Start zum zweiten Mal.
Wer sieht, dass Mattea nach $27\,\text{min} = 18\,\text{min} + 9\,\text{min}$ zum zweiten Mal am ersten Treffpunkt ankommt, kann die Antworten (**A**), (**B**) und (**C**) ausschliessen und muss sich dann überlegen, dass Mattea nach 1 min noch nicht zu Lene aufgeschlossen haben kann.

Honigrätsel

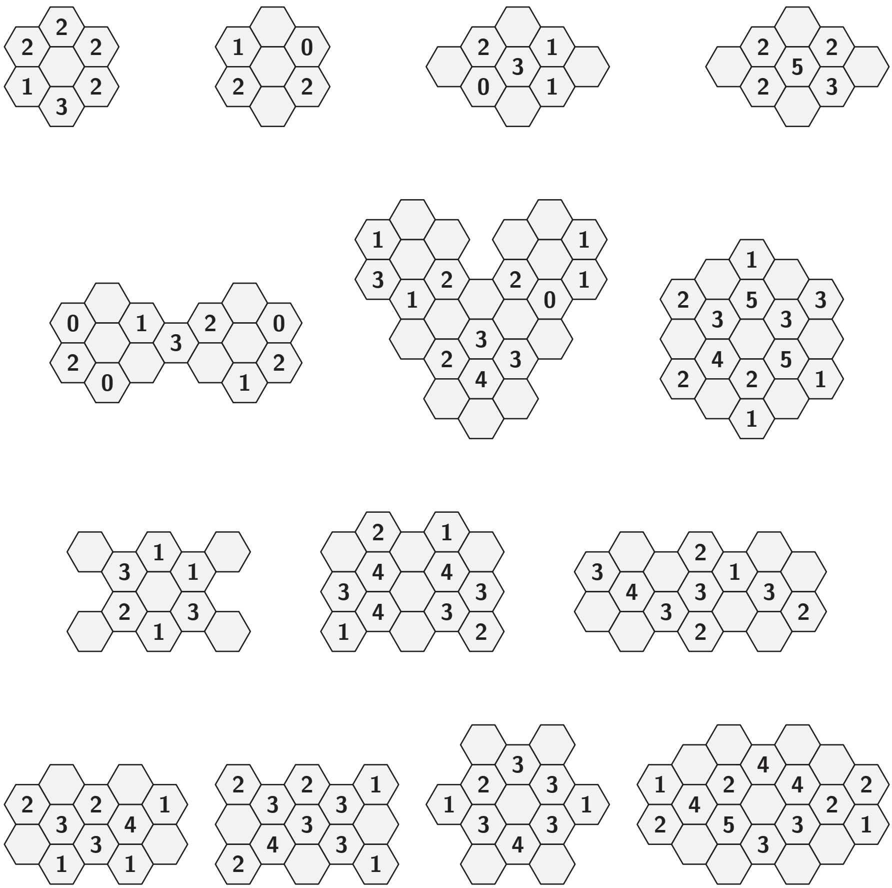
In den abgebildeten Bienenwaben enthalten einige Zellen Honig. Diese gilt es zu finden. Zellen, die Honig enthalten, sollen grau ausgemalt werden. In einigen Zellen stehen Zahlen. Diese geben jeweils an, wie viele der zu dieser Zelle benachbarten Zellen Honig enthalten.

Beim Lösen ist es hilfreich, Zellen mit einem Kreuz zu markieren, die sicher keinen Honig enthalten.

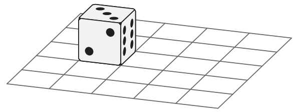
Hier ist ein Beispiel:



Wer findet in den Bienenwaben alle Zellen, die Honig enthalten?



Das Würfel-Kipp-Problem

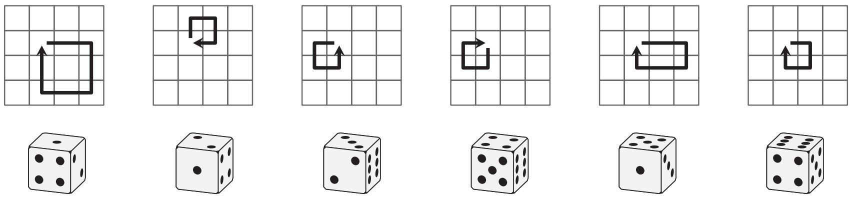


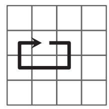
In Klassenstufe 7/8 wurde in Aufgabe 13 ein Spielwürfel auf einem passenden Spielfeld bewegt, indem er über seine Kanten gekippt wurde. Wir wollen untersuchen, wie der Würfel liegen kann, wenn er nach mehrmaligem Kippen wieder zum Startfeld zurückkehrt.

Zuerst stellen wir fest, dass es $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten gibt, wie der Würfel auf einem der Kästchen liegen kann, je nachdem welche der 6 Augenzahlen oben liegt und welche der 4 benachbarten Augenzahlen nach vorn zeigt. Aber ist jeder dieser Möglichkeiten auch für die Endposition möglich?

Wir starten mit dem Würfel, wie er oben abgebildet ist. Durch Probieren finden wir für jede der Augenzahlen von 1 bis 6 einen möglichen Rundweg, sodass der Würfel wieder auf dem Startfeld zu liegen kommt und die jeweilige Augenzahl oben liegt. Da auf einem Spielwürfel die Summe von zwei gegenüberliegenden Augenzahlen stets 7 ist, kennen wir stets auch die Augenzahlen der nicht sichtbaren Seiten.

Ordne die Zugfolgen den Endpositionen des Würfels zu:

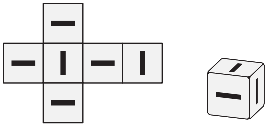




Kippen wir den Würfel entlang des rechts abgebildeten Weges, so liegt die Zahl, die zu Beginn oben war, auch am Ende wieder oben. Die Zahlen auf der vorderen und auf der hinteren Seitenfläche sind allerdings vertauscht. Ebenso sind die Zahlen auf der linken und der rechten Seitenfläche vertauscht.

Kippen wir also den Würfel zuerst wie in den Zugfolgen oben angegeben und anschließend wie rechts, so ergeben sich die folgenden 6 Ausrichtungen.

Nun haben wir schon insgesamt 12 verschiedene Möglichkeiten gefunden, wie der Würfel liegen kann, wenn er wieder auf seinem Startfeld ankommt. Und tatsächlich sind dies auch schon alle. Die restlichen 12 Ausrichtungen, wie der Würfel grundsätzlich liegen kann, sind als Endposition nicht möglich.



Das erkennen wir, indem wir auf die Seitenflächen des Würfels nicht Zahlen sondern wie links abgebildet abwechselnd senkrechte und waagerechte Striche zeichnen. Wenn wir den so markierten Würfel kippen, ist auf der oberen Seitenfläche abwechselnd ein senkrechter und ein waagerechter Strich zu sehen.

Damit der Würfel am Ende wieder auf dem Startfeld liegt, muss er genauso oft nach rechts wie nach links gekippt werden, und er muss genauso oft nach vorne wie nach hinten gekippt werden. Das heißt, der Würfel muss eine gerade Anzahl an Malen gekippt werden. Also ist am Ende der Strich, der oben liegt, genauso ausgerichtet wie zu Beginn. Es können höchstens die vordere und die hintere Seitenfläche und damit auch die linke und die rechte Seitenfläche vertauscht liegen. Mehr ist nicht möglich, und folglich lässt sich der Würfel nicht in die anderen 12 Ausrichtungen bringen, da diese jeweils durch eine Vierteldrehung aus einer der oben abgebildeten, möglichen Ausrichtungen hervorgehen.

Klassenstufen 9 und 10

1. $\dfrac{20 \cdot 2{,}4}{2 \cdot 0{,}24} =$

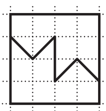
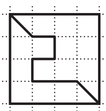
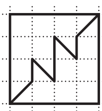
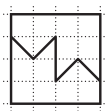
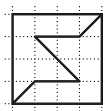
Uganda

(**A**) 0,01 (**B**) 0,1 (**C**) 1 (**D**) 10 (**E**) 100

Lösung: Die beiden Faktoren im Zähler sind jeweils 10-mal so gross wie die jeweils direkt unter ihnen stehenden Faktoren im Nenner. Also ist das Ergebnis der Rechnung $10 \cdot 10 = 100$.

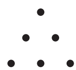
2. Welches der folgenden Quadrate ist in zwei unterschiedliche Teile geteilt?

Schweiz

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wem auffällt, dass die Teilflächen bei (**B**) unterschiedlich gross sind, hat die Lösung. Die Quadrate bei (**A**), (**C**), (**D**) und (**E**) sind punktsymmetrisch zum Mittelpunkt und die beiden Teile folglich jeweils gleich.

Wie viele Geraden gibt es, die durch genau zwei der sechs abgebildeten Punkte verlaufen?



3. Lucas spricht in Rätseln: „Ich bin heute so früh aufgewacht, da war gerade mal die Hälfte des ersten Drittels des Tages vorbei.“ Wann ist Lucas aufgewacht?

Usbekistan

(**A**) um 1 Uhr (**B**) um 2 Uhr (**C**) um 3 Uhr (**D**) um 4 Uhr (**E**) um 5 Uhr

Lösung: Da der Tag 24 Stunden hat, ist das erste Drittel nach $24 : 3 = 8$ Stunden vorbei und die Hälfte davon nach $8 : 2 = 4$ Stunden. Lucas ist also um 4 Uhr aufgewacht.

4. Clementine springt auf den Platten auf dem Schulhof nach dem rechts gezeichneten Muster: linker Fuss – beide Füsse – rechter Fuss – beide Füsse – und dann wieder von vorn wie im Bild. Auf der 48. Platte hört sie auf. Wie viele Platten hat Clementine mit dem linken Fuss berührt?

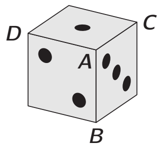
Österreich

(**A**) 20 (**B**) 28 (**C**) 32 (**D**) 36 (**E**) 40

Lösung: Das Muster wiederholt sich immer nach 4 Platten. Wegen $48 : 4 = 12$ gibt es die Abfolge der Sprünge auf den ersten 4 Platten insgesamt 12 Mal. Von den ersten 4 Platten hat Clementine 3 mit dem linken Fuss berührt, nämlich die erste, die zweite und die vierte. Folglich hat Clementine insgesamt $12 \cdot 3 = 36$ Platten mit dem linken Fuss berührt.

5. Rechts ist ein Spielwürfel abgebildet, bei dem sich wie üblich zwei gegenüberliegende Augenzahlen stets zu 7 addieren. Die Ecke ***A*** grenzt an die Seitenflächen mit 1, 2 und 3 Augen und hat demnach die Augensumme $(1 + 2 + 3 =)$ 6. Welches ist die grösste Zahl unter den Augensummen der Ecken ***B***, ***C*** und ***D***?

Niederlande



(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 14

Lösung: Gegenüber der 1 liegt die Augenzahl 6, gegenüber der 2 liegt die Augenzahl 5, und gegenüber der 3 liegt die Augenzahl 4. Die Ecken ***B***, ***C*** und ***D*** haben demnach die Augensummen $2+3+6 = 11$, $1+3+5 = 9$ und $1+2+4 = 7$. Die größte von ihnen ist 11.

6. Am Wochenende hat eine bekannte Band ein Konzert gespielt. Für den Zeitungsbericht rundet die Redakteurin die Anzahl der Besucher. Dabei stellt sie fest, dass sie dieselbe Zahl erhält, egal ob sie auf Zehner oder auf Hunderter rundet. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Besucher sein?

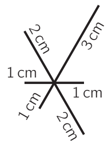
Tschechien

(**A**) 3794 (**B**) 4912 (**C**) 5297 (**D**) 6586 (**E**) 7309

Lösung: Runden wir die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten auf Zehner, erhalten wir (**A**) 3790, (**B**) 4910, (**C**) 5300, (**D**) 6590, (**E**) 7310. Runden wir die Zahlen in den Antwortmöglichkeiten auf Hunderter, erhalten wir (**A**) 3800, (**B**) 4900, (**C**) 5300, (**D**) 6600, (**E**) 7300. Nur bei (**C**) erhalten wir beide Male dieselbe Zahl, das ist also die richtige Antwort.
Übrigens haben genau die natürlichen Zahlen, die auf 95, 96, 97, 98, 99, 00, 01, 02, 03 und 04 enden, die genannte Eigenschaft.

7. Tim möchte die rechts abgebildete Figur in einem Zug zeichnen, ohne seinen Stift abzusetzen. Er kann an einer beliebigen Stelle beginnen und möchte so wenig wie möglich doppelt zeichnen. Wie lang ist dann der Weg, den Tims Stift zurücklegen muss?

Deutschland



(**A**) 18 cm (**B**) 17 cm (**C**) 16 cm (**D**) 15 cm (**E**) 14 cm

Lösung: Die Strecke, bei der Tim mit dem Zeichnen beginnt, und die Strecke, bei der er endet, muss Tim nur einmal zeichnen. Die anderen vier Strecken muss er doppelt zeichnen, nämlich einmal von der Mitte zur Spitze und wieder zurück. So wenig wie möglich zeichnet Tim doppelt, wenn er möglichst kurze Strecken doppelt zeichnet, also die drei 1-cm-Strecken und eine 2-cm-Strecke. Tims Stift muss dann $2 \cdot (3 \cdot 1\,\text{cm} + 2\,\text{cm}) + 2\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$ zurücklegen.

8. Eine dreistellige Palindromzahl ist eine dreistellige Zahl der Form „*aba*“, wobei die Ziffern *a* und *b* gleich oder verschieden sein dürfen. Beispielsweise sind 272 und 555 dreistellige Palindromzahlen. Was ist die Quersumme der grössten durch 2 teilbaren dreistelligen Palindromzahl?

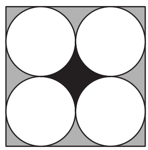
Spanien

(**A**) 25 (**B**) 23 (**C**) 21 (**D**) 18 (**E**) 16

Lösung: Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn sie auf eine gerade Ziffer endet. Da wir die grösste durch 2 teilbare dreistellige Palindromzahl suchen, sollte sie auf 8 enden und folglich auch mit 8 beginnen. Für die Zehnerziffer gibt es keine Beschränkung, sodass 898 die gesuchte Zahl ist. Ihre Quersumme ist $8+9+8 = 25$.

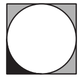
9. Das Bild rechts zeigt ein Quadrat und 4 gleich grosse Kreise. Jeder der Kreise berührt zwei Seiten des Quadrats und zwei andere Kreise. Die schwarze Fläche in der Mitte ist $1\,\text{cm}^2$ gross. Welchen Flächeninhalt hat die gesamte graue Fläche?

Pakistan



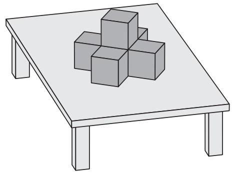
(**A**) $2\,\text{cm}^2$ (**B**) $3\,\text{cm}^2$ (**C**) $4\,\text{cm}^2$ (**D**) $5\,\text{cm}^2$ (**E**) $6\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir zerlegen das Quadrat in vier gleich grosse, kleinere Quadrate. In jedem davon ist eine der „Ecken“ ausserhalb des einbeschriebenen Kreises schwarz und die anderen drei sind grau, siehe Bild. Die graue Fläche ist also 3-mal so gross wie die schwarze, ihr Flächeninhalt ist insgesamt $3\,\text{cm}^2$ gross.



10. Brasilien

William hat viele gleich grosse Würfel. Er legt einen davon auf den Tisch. Dann legt er 5 weitere Würfel so dazu, dass vom ersten Würfel alle Seitenflächen bedeckt sind. Nun möchte er zusätzliche Würfel so dazulegen, dass von den bereits liegenden Würfeln alle Seitenflächen bedeckt sind. Wie viele zusätzliche Würfel braucht William dafür mindestens?



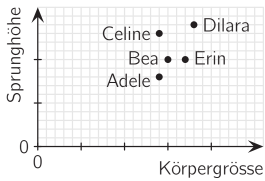
(**A**) 7 (**B**) 10 (**C**) 13 (**D**) 16 (**E**) 19

Lösung: Um die Seitenflächen der Würfel, die direkt auf dem Tisch liegen, zu verdecken, benötigen wir je einen Würfel an den nach aussen zeigenden Seitenflächen (das sind insgesamt 4), je einen Würfel in den „Ecken“ zwischen zwei benachbarten dieser Würfel (das sind insgesamt 4) und je einen Würfel auf den nach oben zeigenden Seitenflächen dieser Würfel (das sind insgesamt ebenfalls 4). Die 4 zuletzt genannten Würfel bedecken vom oberen bereits liegenden Würfel alle Seitenflächen bis auf die obere. Für diese ist ein weiterer Würfel nötig. Insgesamt werden $3 \cdot 4 + 1 = 13$ Würfel gebraucht.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 22 zu lösen. —

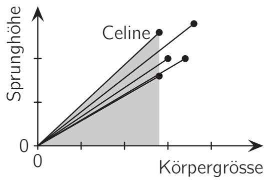
11. Südafrika

Fünf Freundinnen haben ihre Hochsprung-Ergebnisse vom Sportfest in ein Diagramm eingetragen. Adele sagt: „Ich finde, dass diejenige am besten war, bei der das Verhältnis von Sprunghöhe zu Körpergrösse am grössten ist.“ Wer war nach Adeles Meinung am besten?



(**A**) Adele (**B**) Bea (**C**) Celine (**D**) Dilara (**E**) Erin

Lösung: Für jeden der Punkte entspricht der Quotient $\frac{\text{Sprunghöhe}}{\text{Körpergrösse}}$ der Steigung einer Geraden durch diesen Punkt und den Koordinatenursprung, denn es handelt sich bei Zähler und Nenner genau um die Kathetenlängen im Steigungsdreieck zwischen diesen beiden Punkten. Die Lösung finden wir daher durch Zeichnen: Die grösste Steigung hat die Ursprungsgerade durch den Punkt, der zu Celine gehört.
Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir für geeignete Punktepaare die zugehörigen Verhältnisse vergleichen.



12. Myanmar

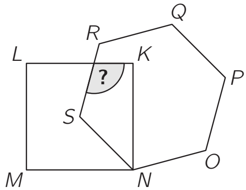
Die Mathe-AG der 9. Klassen hat für die benachbarte Grundschule einen Primzahl-Schulgarten geplant. Der rechteckige Garten wird mit 40 jeweils 1 m langen Zaunteilen eingezäunt, wobei die Seitenlängen des Gartens (in Metern) Primzahlen sind. Wie gross kann die Fläche des Gartens höchstens sein?

(**A**) $77\,\text{m}^2$ (**B**) $82\,\text{m}^2$ (**C**) $85\,\text{m}^2$ (**D**) $91\,\text{m}^2$ (**E**) $97\,\text{m}^2$

Lösung: Da der Umfang des rechteckigen Gartens 40 m lang ist, ist $40\,\text{m} : 2 = 20\,\text{m}$ die Summe der beiden Seitenlängen. Wählen wir als kleinere der beiden Seitenlängen eine Primzahl (in Metern), ergeben sich die Zerlegungen $20\,\text{m} = 2\,\text{m} + 18\,\text{m} = 3\,\text{m} + 17\,\text{m} = 5\,\text{m} + 15\,\text{m} = 7\,\text{m} + 13\,\text{m}$. Nur bei der zweiten und bei der vierten Zerlegung ist auch die grössere der beiden Seitenlängen (in Metern) eine Primzahl. Und wegen $3 \cdot 17 = 51 < 91 = 7 \cdot 13$ ist der gesuchte grösstmögliche Flächeninhalt $91\,\text{m}^2$.

13. Im Bild rechts ist der Eckpunkt S des regelmässigen Sechsecks $NOPQRS$ gleichzeitig der Mittelpunkt des Quadrats $KLMN$.
Wie gross ist der mit dem Fragezeichen markierte Winkel?

Spanien



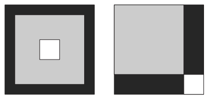
(**A**) 105° (**B**) 110° (**C**) 115° (**D**) 120° (**E**) 125°

Lösung: Wir bezeichnen den Scheitelpunkt des mit dem Fragezeichen markierten Winkels mit X und bestimmen die Innenwinkel des Vierecks $NKXS$. Der Winkel bei K ist ein Innenwinkel des Quadrats $KLMN$, also 90° gross. Der Winkel bei S ist ein Innenwinkel des regelmässigen Sechsecks $NOPQRS$, also 120° gross. Das erkennen wir, da ein regelmässiges Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt werden kann, wobei an jeder Ecke des Sechsecks zwei solcher Dreiecke zusammenstossen. Der Winkel bei N wird im Quadrat $KLMN$ von einer Seite und einer Diagonalen eingeschlossen und ist somit 45° gross, da die Diagonale den 90°-Winkel KNM halbiert. Mithilfe des Innenwinkelsatzes für Vierecke können wir nun die gesuchte Winkelgrösse berechnen. Der mit dem Fragezeichen markierte Winkel ist $360° - 90° - 120° - 45° = 105°$ gross.

Wer kann aus neun verschiedenen Ziffern drei 3-stellige Zahlen bilden, deren Summe die Jahreszahl 2024 ist?

14. Neo legt ein schwarzes, ein graues und ein weisses Quadrat auf zwei verschiedene Weisen aufeinander. Im linken Bild ist die sichtbare schwarze Fläche 8-mal so gross wie die Fläche des weissen Quadrats. Wie verhält sich im rechten Bild die sichtbare schwarze Fläche zur Fläche des weissen Quadrats?

Brasilien

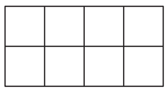


(**A**) 9 : 2 (**B**) 4 : 1 (**C**) 8 : 3 (**D**) 5 : 2 (**E**) 7 : 1

Lösung: In beiden Bildern ist die Fläche außerhalb des grauen Quadrats gleich gross. Daher ist im rechten Bild die Fläche ausserhalb des grauen Quadrats genauso gross wie die schwarze Fläche im linken Bild, also 8-mal so gross wie das weisse Quadrat. Da das weisse Quadrat im rechten Bild innerhalb dieser Fläche liegt, ist die sichtbare schwarze Fläche nur noch 7-mal so gross wie das weisse Quadrat. Das gesuchte Verhältnis ist also 7 : 1.

15. Jelena will in jedes Feld des abgebildeten 2×4-Gitters einen der Buchstaben A, B, C, D schreiben. Dabei soll in jeder Zeile und in jedem 2×2-Quadrat jeder der vier Buchstaben genau einmal vorkommen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für das vollständig ausgefüllte 2×4-Gitter?

Tschechien



(**A**) 198 (**B**) 96 (**C**) 48 (**D**) 24 (**E**) 12

B	D	A	C
	C		

Lösung: Die erste Zeile können wir zunächst mit den Buchstaben von A bis D in beliebiger Reihenfolge füllen. Dafür gibt es $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Dann ist in der unteren Zeile klar, welcher Buchstabe ins zweite Feld von links gehört, damit im 2×2-Quadrat ganz links und im 2×2-Quadrat in der Mitte jeder der vier Buchstaben genau einmal vorkommt. Es ist der Buchstabe, der in der oberen Zeile ganz rechts steht. Im Beispiel rechts ist das ein C. Damit sind aber auch die übrigen fehlenden Buchstaben klar. Im Beispiel gehören in die untere Zeile von links nach rechts A, C, B und D. Die untere Zeile ist also durch die obere eindeutig festgelegt. Damit bleibt es bei insgesamt 24 Möglichkeiten für das vollständig ausgefüllte 2×4-Gitter.

16. Vier Kinder haben jedes eine kleine Truhe mit einem jeweils nur zur eigenen Truhe passenden Schlüssel. Zum Spass mischen sie die Schlüssel und jedes nimmt sich zufällig einen davon. Auf wie viele Arten können die Schlüssel so auf die vier Kinder verteilt sein, dass genau ein Kind den zur eigenen Truhe passenden Schlüssel hat und die anderen drei Kinder nicht?

Indonesien

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Für das Kind, das den zur eigenen Truhe passenden Schlüssel hat, gibt es 4 Möglichkeiten. Wir müssen herausfinden, auf wie viele Arten die anderen drei Schlüssel verteilt sein können, ohne dass ein weiteres Kind den zur eigenen Truhe passenden Schlüssel hat. Dazu bezeichnen wir die Kinder mit X, Y, und Z und ihre Schlüssel mit x, y und z. Kind X kann Schlüssel y oder z haben. Wenn es Schlüssel y hat, ist klar, dass Kind Z Schlüssel x haben muss und Kind Y Schlüssel z. Ebenso gibt es nur eine Möglichkeit, wenn Kind X Schlüssel z hat. Also können die drei übrigen Schlüssel auf 2 Arten verteilt sein. Insgesamt gibt es folglich $4 \cdot 2 = 8$ Arten, wie die Schlüssel verteilt sein können.

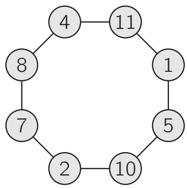
Wer findet alle 5-stelligen Zahlen, die sowohl durch 2^3, 3^3 als auch 5^3 teilbar sind?

17. Christian hat 12 Plättchen, die mit den Zahlen von 1 bis 12 beschriftet sind. Er legt 8 davon so auf die Ecken eines Achtecks, dass die Summe der Zahlen auf je zwei nebeneinanderliegenden Plättchen stets durch 3 teilbar ist. Welche Zahlen stehen dann auf den 4 Plättchen, die übrig sind?

Griechenland

(**A**) 1, 5, 9, 12 (**B**) 3, 5, 7, 11 (**C**) 1, 2, 11, 12 (**D**) 5, 6, 7, 8 (**E**) 3, 6, 9, 12

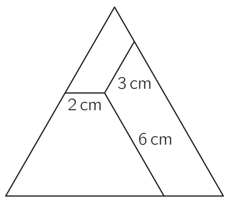
Lösung: Wenn eine der Eckzahlen durch 3 teilbar ist, dann müssen es auch ihre Nachbarn sein, damit die Summe der Zahlen auf je zwei nebeneinanderliegenden Plättchen stets durch 3 teilbar ist. Wenn also eine der Eckzahlen durch 3 teilbar ist, dann müssen alle acht Eckzahlen durch 3 teilbar sein. Das ist aber nicht möglich, da von den verfügbaren Zahlen nur 3, 6, 9, 12 durch 3 teilbar sind. Diese 4 Zahlen müssen folglich übrig sein.
Dass die übrigen Zahlen wie gewünscht auf die Ecken des Achtecks gelegt werden können, zeigt das Beispiel rechts. Mit einem solchen Beispiel hätte man die Aufgaben übrigens auch gut lösen können.



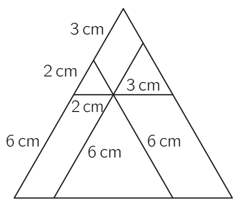
18. Das gleichseitige Dreieck im Bild wird durch drei Strecken im Inneren in drei Teile geteilt. Die Strecken sind 2 cm, 3 cm bzw. 6 cm lang und jeweils parallel zu einer der Dreiecksseiten. Welchen Umfang hat das gleichseitige Dreieck?

Griechenland

(**A**) 24 cm (**B**) 27 cm (**C**) 33 cm (**D**) 36 cm (**E**) 42 cm



Lösung: Indem wir die Strecken wie abgebildet verlängern, zerlegen wir das gleichseitige Dreieck in kleinere gleichseitige Dreiecke und Parallelogramme. Da in gleichseitigen Dreiecken alle Seiten und in Parallelogrammen gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, sehen wir zum Beispiel, dass sich die linke Seite des grossen gleichseitigen Dreiecks aus Strecken der Längen 6 cm, 2 cm und 3 cm zusammensetzt und folglich $6\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$ lang ist. Der Umfang des grossen gleichseitigen Dreiecks ist also $3 \cdot 11\,\text{cm} = 33\,\text{cm}$ lang.



19. Heute wurde Katharinas Enkeltochter Nellie geboren. Sowohl das Alter von Nellies Mutter Anna als auch das Alter von Katharina ist eine gerade Zahl. Multipliziert man in genau 2 Jahren das Alter von Katharina, Anna und Nellie, erhält man 2024. Wie alt ist Katharina heute?

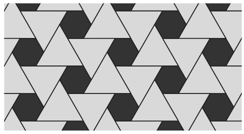
Ungarn

(**A**) 44 (**B**) 48 (**C**) 50 (**D**) 54 (**E**) 56

Lösung: Wir zerlegen 2024 in Primfaktoren, um mögliche Faktoren für das Alter der Drei in 2 Jahren zu bestimmen: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. In 2 Jahren wird Nellie 2 Jahre alt sein und sowohl das Alter von Anna als auch das Alter von Katharina wird eine gerade Zahl sein. Folglich sind die 3 Faktoren 2 in der Primfaktorzerlegung von 2024 auf die 3 Zahlen, die jeweils das Alter der Drei in 2 Jahren angeben, verteilt. Da nur noch 2 Faktoren übrig sind und Katharina älter als Anna sowie Anna älter als Nellie ist, ist klar, dass in 2 Jahren Nellie 2 Jahre, Anna $2 \cdot 11 = 22$ Jahre und Katharina $2 \cdot 23 = 46$ Jahre alt ist. Katharina ist heute also $46 - 2 = 44$ Jahre alt.

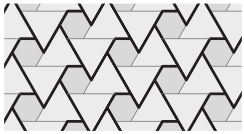
20. Bei Ausgrabungsarbeiten wurde eine grosse Halle freigelegt. Nur einige der kleinen Bodenfliesen sind erhalten, aber es konnte rekonstruiert werden, dass der Fussboden so gefliest war wie im Ausschnitt rechts. Die Archäologen schätzen, dass es ursprünglich etwa 2000 sechseckige Fliesen waren. Wie viele dreieckige Fliesen waren es dann ursprünglich?

Finnland



(**A**) etwa 3000 (**B**) etwa 4000 (**C**) etwa 5000 (**D**) etwa 6000 (**E**) etwa 8000

Lösung: Aus dem Bild lesen wir ab, dass jedes Sechseck von 6 Dreiecken umgeben ist und jedes Dreieck an 3 Sechsecke angrenzt. Die Anzahl der Dreiecke erhalten wir also, indem wir die Anzahl der Sechsecke mit 6 multiplizieren und dann durch 3 teilen, um nichts mehrfach zu zählen. Insgesamt waren es ursprünglich also etwa $2000 \cdot 6 : 3 = 4000$ dreieckige Fliesen.
Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir ein geeignetes Puzzleteil aus Sechsecken und Dreiecken finden, mit dem sich der Fussboden auslegen lässt. Ein mögliches ist rechts angegeben. Es besteht aus einem Sechseck und 2 Dreiecken, also werden etwa doppelt so viele dreieckige Fliesen wie sechseckige Fliesen benötigt, das heisst etwa 4000.



21. Die Wächterin des Reichs Primalia spricht immer abwechselnd den ganzen Tag die Wahrheit oder sie lügt den ganzen Tag. An einem Tag hat sie genau vier der folgenden fünf Aussagen gemacht. Welche Aussage stammt nicht von diesem Tag?

Ungarn

(**A**) 2024 ist keine Primzahl.
(**B**) Ich sage heute die Wahrheit und werde morgen die Wahrheit sagen.
(**C**) Ich log gestern und ich werde morgen lügen.
(**D**) Morgen ist Montag.
(**E**) Gestern war Donnerstag.

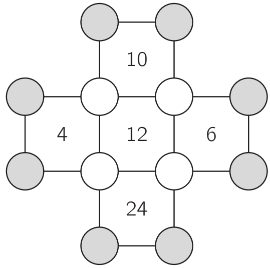
Lösung: Schauen wir uns die Aussagen aufmerksam an, bemerken wir, dass ganz sicher Aussage (**B**) eine Lüge ist und mindestens eine der Aussagen (**D**) und (**E**). Unter den Antworten sind also mindestens zwei Lügen. Daher ist mindestens eine der vier Aussagen, die von diesem Tag stammen, eine Lüge. Das heisst, der genannte Tag ist ein Lügentag. Da die Aussage (**A**) unabhängig vom Wochentag stets wahr ist, kann sie nicht von diesem Tag stammen und ist somit die gesuchte Aussage.

Für die Ziffern A und B gilt $AAA + BBB + ABA + BAB = 1110$. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für A und B?

22. In jeden Kreis im Bild rechts soll eine natürliche Zahl eingetragen werden. Die Zahl im Inneren eines jeden Quadrats gibt an, welches Produkt die Zahlen in den vier Ecken des Quadrats haben sollen. Wie gross ist dann das Produkt der Zahlen in den 8 grauen Kreisen?

Griechenland

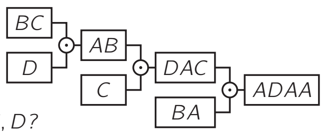
(**A**) 20 (**B**) 40 (**C**) 80 (**D**) 120 (**E**) 360



Lösung: Die Aufgabe lässt sich gut lösen, indem wir eine Beispielbelegung für die Kreise finden. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, aber das Produkt der Zahlen in den 8 grauen Kreisen ist stets 40. Etwas eleganter und schneller ist folgende Methode: Das Produkt der Zahlen in den 8 grauen Kreisen erhalten wir, indem wir die äusseren Produkte 4, 10, 6 und 24 multiplizieren und dann anschliessend die überflüssigen Faktoren, die von den weissen Kreisen stammen, wieder „rausrechnen“. Da die Zahlen aus den weissen Kreisen je zweimal eingerechnet sind, müssen wir zweimal durch 12 teilen. Das Produkt der Zahlen in den 8 grauen Kreisen ist also $\dfrac{4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 24}{12 \cdot 12} = 40$.

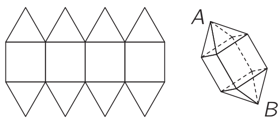
Die vier Buchstaben A, B, C, D im Produktbaum rechts stehen für vier verschiedene Ziffern. Außerdem sind die drei Zahlen C, D und BC Primzahlen.

Für welche Ziffern stehen die Buchstaben A, B, C, D?



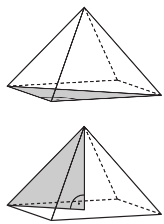
23. Otis will den abgebildeten Körper basteln, einen Würfel mit zwei aufgesetzten Pyramiden. Er zeichnet dazu ein Netz aus Quadraten und gleichseitigen Dreiecken. Die Seitenlänge der Quadrate und Dreiecke beträgt jeweils 1 cm. Wie gross ist der Abstand zwischen den Pyramidenspitzen A und B im fertigen Körper?

Mexiko

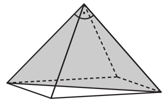


(**A**) $\sqrt{5}$ cm (**B**) $(1+\sqrt{3})$ cm (**C**) $2\sqrt{2}$ cm (**D**) $\frac{5}{2}$ cm (**E**) $(1+\sqrt{2})$ cm

Lösung: Es genügt, die Länge der Höhe einer der Pyramiden zu bestimmen. Dazu stellen wir fest, dass der zugehörige Höhenfusspunkt genau der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der quadratischen Grundfläche ist. Mit dem Satz des Pythagoras berechnen wir zunächst die Länge der Diagonalen, sie beträgt (in cm) $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ (siehe erstes Bild). Da die Höhe der Pyramide senkrecht auf der Grundfläche steht, können wir noch einmal den Satz des Pythagoras anwenden, und zwar auf das rechtwinklige Dreieck mit einer Pyramidenkante als Hypotenuse und der gesuchten Höhe sowie einer halben Diagonalen der Grundfläche als Katheten (siehe zweites Bild). Die Höhe der Pyramide ist (in cm) also $\sqrt{1^1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ lang. Da der Würfel 1 cm hoch ist, ist der gesuchte Abstand $(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})$ cm $= (1+\sqrt{2})$ cm.



Wer erkennt, dass die im ersten und im dritten Bild markierten Dreieck zueinander kongruent sind (sss), braucht nicht noch einmal zu rechnen, denn die Höhe der Pyramide ist damit genauso lang wie eine halbe Diagonale der Grundfläche, also $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\text{cm}$, und der gesuchte Abstand ist folglich $(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})\,\text{cm} = (1 + \sqrt{2})\,\text{cm}$.



24. Vier Freunde sind Pizza essen. Als sie fertig sind, sind noch einige Stücke übrig.
Auf dem 1. Teller liegen noch so viele Stücke, wie es Teller mit genau einem Stück gibt.
Auf dem 2. Teller liegen noch so viele Stücke, wie es Teller mit genau 2 Stücken gibt.
Auf dem 3. Teller liegen noch so viele Stücke, wie es Teller mit genau 3 Stücken gibt.
Auf dem 4. Teller liegen noch so viele Stücke, wie es leere Teller gibt.
Wie viele Stücke sind insgesamt übrig?

Lettland

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Wir zeigen, dass genauso viele Stücke übrig sind, wie es Teller gibt, also insgesamt 4. Dazu stellen wir zunächst fest, dass auf keinem Teller mehr als 3 Stücke liegen. Wären nämlich auf einem Teller 4 Stücke übrig, dann wären, nach der Vorgabe für die 4 Teller, auf allen 4 Tellern gleich viele Stücke, aber nicht 4, sondern eine der Stückzahlen 0 bis 3. Mehr als 4 Stücke können es sicher nicht sein, da es nur 4 Teller sind.
Durch die Anzahl der Stücke wird gezählt, wie viele Teller mit 0, 1, 2 oder 3 Stücken es sind. Und da es keine Teller mit mehr als 3 Stücken gibt, wird jeder Teller genau einmal mitgezählt. Folglich sind genauso viele Stücke übrig, wie es Teller gibt.
Für die Verteilung der Stücke gibt es zwei Möglichkeiten, 0–2–0–2 oder 2–1–0–1, die sich auch durch systematisches Überlegen finden lassen.

25. Leo hat aus 27 kleinen, gleich grossen Würfeln einen grossen $3 \times 3 \times 3$-Würfel gebaut. Die kleinen Würfel sind schwarz, grau oder weiss. Die Oberfläche des grossen Würfels ist jeweils zu einem Drittel schwarz, grau und weiss. Leo hat die grösstmögliche Anzahl an schwarzen Würfeln und die kleinstmögliche Anzahl an weissen Würfeln verwendet. Wie viele graue Würfel hat Leo verwendet?

Österreich

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 10

Lösung: Die Oberfläche des $3 \times 3 \times 3$-Würfels besteht aus $6 \cdot (3 \cdot 3) = 54$ kleinen Quadraten, von denen jeweils $54 : 3 = 18$ schwarz, grau und weiss sind.
Da Leo die grösstmögliche Anzahl an schwarzen Würfeln verwendet hat, gehören von diesen möglichst wenige Seitenflächen zur Oberfläche des grossen Würfels. Also hat er schwarze Würfel für den einen Würfel ganz im Inneren verwendet (0 Seitenflächen), für die 6 Würfel in der Mitte der Seitenflächen des grossen Würfels (6 Seitenflächen) und noch für 6 der 12 Würfel in den Mitten der Kanten des grossen Würfels ($6 \cdot 2 = 12$ Seitenflächen). Das sind insgesamt 13 schwarze Würfel.
Da Leo die kleinstmögliche Anzahl an weissen Würfeln verwendet hat, gehören von diesen möglichst viele Seitenflächen zur Oberfläche des grossen Würfels. Also hat er weisse Würfel für 6 der 8 Würfel an den Ecken des grossen Würfels verwendet ($6 \cdot 3 = 18$ Seitenflächen).
Alle übrigen der 27 kleinen Würfel sind grau. Es sind also $27 - 13 - 6 = 8$ graue Würfel.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 11-13 in Aufgabe 11 zu lösen. —

Wer kann die Ziffern von 2 bis 7 so auf die leeren Kästchen verteilen, dass das Ergebnis der Rechnung die Jahreszahl 2024 ist?

$$\square\,\square \cdot \square\,\square + \square\,\square = \boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{4}$$

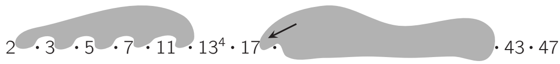
26. Die Quersumme der natürlichen Zahl N ist doppelt so gross wie die Quersumme ihres Nachfolgers $N+1$. Was ist die kleinstmögliche Quersumme, die N haben kann?

Russland

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Da die Quersumme der natürlichen Zahl N doppelt so gross wie die Quersumme ihres Nachfolgers $N+1$ ist, muss N auf die Ziffer 9 enden, denn sonst wäre ihre Quersumme um 1 kleiner und nicht grösser. N hat also die Form $\overline{x9}$, wobei x eine noch zu bestimmende natürliche Zahl ist. $N+1$ hat dann die Form $\overline{(x+1)0}$ und für die Quersummen gelten $Q(N) = Q(x)+9$ sowie $Q(N+1) = Q(x+1)$. Wenn x nicht auf 9 endet, gilt $Q(x+1) = Q(x)+1$ und somit $Q(x)+9 = 2 \cdot (Q(x)+1)$, also $Q(x) = 7$. Die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist 79, die man auch durch Probieren finden kann. Tatsächlich gilt $Q(79) = 16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot Q(80) = 2 \cdot Q(79+1)$. Wenn die Zahl x auf 9 endet, ist ihre Quersumme sicher grösser als 7. Also haben wir mit 16 bereits das Minimum für die Quersumme von N gefunden.
Die genannte Eigenschaft gilt, wie die Rechnung zeigt, übrigens für jede Zahl, die auf 9 endet und deren übrige Ziffern die Summe 7 haben, also zum Beispiel auch für 529 oder die grosse Zahl 20 001 049.

27. Für eine gegebene natürliche Zahl n ist rechts die Primfaktorzerlegung von $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ zu sehen.



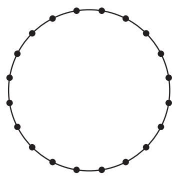
Einige Primzahlen und einige Exponenten sind verdeckt. Welcher Exponent gehört zum Primfaktor 17?

Griechenland

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Da $n!$ den Primfaktor 13 genau 4-mal enthält, finden wir im Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ die Faktoren 13, 26 $(= 2 \cdot 13)$, 39 $(= 3 \cdot 13)$ und 52 $(= 4 \cdot 13)$, aber keine grösseren Vielfachen von 13. Also ist n grösser oder gleich 52, aber kleiner als 65 $(= 5 \cdot 13)$. Von den Vielfachen von 17 sind 17, 34 $(= 2 \cdot 17)$ und 51 $(= 3 \cdot 17)$ kleiner als 52 und kommen sicher als Faktoren im Produkt $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ vor. Da 68 $(= 4 \cdot 17)$ bereits grösser als 65 ist, kommen keine grösseren Vielfachen von 17 vor. Also enthält $n!$ den Primfaktor 17 genau 3-mal, d. h., der verdeckte Exponent bei der 17 ist eine 3.
Übrigens, wenn wir annehmen, dass die Primfaktoren im Bild der Grösse nach sortiert sind, dann kann nur $n = 52$ gelten, da 53 eine Primzahl ist, aber nicht in der Primfaktorzerlegung von $n!$ vorkommt. Für unsere Überlegung haben wir aber lediglich gebraucht, dass der Exponent des Primfaktors 13 genau 4 ist, mehr war nicht nötig.

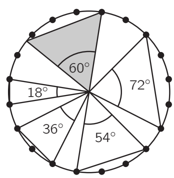
28. Nina hat einen Kreis mit 20 Punkten in 20 gleich lange Kreisbögen geteilt. Sie zeichnet alle Sehnen ein, die zwei dieser Punkte verbinden. Wie viele dieser Sehnen sind länger als der Radius, aber kürzer als der Durchmesser des Kreises?



Hongkong

(**A**) 90 (**B**) 100 (**C**) 120 (**D**) 140 (**E**) 160

Lösung: Wir nehmen an, dass jeder der 20 gleich langen Kreisbögen die Länge 1 hat. Alle Sehnen, die nicht zwei gegenüberliegende Punkte verbinden, sind kürzer als der Durchmesser des Kreises.
Für diese Sehnen betrachten wir den kürzeren der beiden zugehörigen Kreisbögen. Dieser hat die Länge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9. Um zu sehen, welche der Sehnen länger als der Radius des Kreises sind, zeichnen wir zum Vergleich eine Sehne ein, die genauso lang wie der Radius des Kreises ist. Sie bildet mit den beiden Radien an ihren Endpunkten ein gleichseitiges Dreieck. Eine Sehne ist also genau dann länger als der Radius des Kreises, wenn der zugehörige Zentriwinkel grösser als 60° ist.
Der Zentriwinkel über der Sehne zwischen zwei benachbarten der 20 Punkte ist $360^\circ : 20 = 18^\circ$ gross. Der Zentriwinkel über den Kreisbögen der Längen 1, 2 und 3 sind 18°, $2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$ bzw. $3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$ und die zugehörigen Sehnen folglich kürzer als der Radius des Kreises. Bei den Kreisbögen der Längen 4, 5, 6, 7, 8 und 9 sind die Zentriwinkel grösser als 60° und die zugehörigen Sehnen



folglich länger als der Radius des Kreises. Von jeder dieser 6 Sorten gibt es 20 Sehnen, die jeweils um Vielfache von 18° um den Kreismittelpunkt gedreht sind. Folglich sind insgesamt $20 \cdot 6 = 120$ Sehnen länger als der Radius und kürzer als der Durchmesser des Kreises.

— Eine andere Aufgabe mit einer ähnlichen Situation war Aufgabe 28 in Klassenstufe 11–13. —

29. Spanien Mert hat 18 Mal mit einem normalen 6-seitigen Spielwürfel gewürfelt. Die Augenzahl 1 hat er häufiger gewürfelt als jede einzelne der anderen Augenzahlen 2, 3, 4, 5 und 6. Die Summe aller gewürfelten Augenzahlen ist die unter diesen Bedingungen grösstmögliche Summe. Wie gross ist diese Summe?

(**A**) 71 (**B**) 69 (**C**) 68 (**D**) 63 (**E**) 62

Lösung: Wir berechnen jeweils die grösstmögliche Summe in Abhängigkeit von der Anzahl der Einsen. Die grösstmögliche Summe erhalten wir, indem wir der Reihe nach mit der grösstmöglichen Anzahl an Sechsen, dann an Fünfen usw. auffüllen, bis 18 Summanden gewählt sind.
Mit mehr als 9 Einsen, ist die Summe sicher nicht grösser als $10 \cdot 1 + 8 \cdot 6 = 58$. Weniger als 4 Einsen können es nicht sein, da es dann höchstens $3 + 5 \cdot 2 = 13$ Würfel wären.

9 Einsen	$9 \cdot 1 + 8 \cdot 6 + 1 \cdot 5$	$= 62$
8 Einsen	$8 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 3 \cdot 5$	$= 65$
7 Einsen	$7 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 5$	$= 68$
6 Einsen	$6 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 4$	$= \mathbf{69}$
5 Einsen	$5 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3$	$= 68$
4 Einsen	$4 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2$	$= 62$

Mert hat die grösstmögliche dieser Summen erhalten, das heisst 69.
Wir geben noch eine zweite Lösung an. Nach diesem Prinzip kann man die Aufgabe im Gegensatz zur ersten Lösung auch gut lösen, wenn die Anzahl der Würfe sehr viel grösser wäre.
Wir schreiben die Zahlen von 1 bis 6 untereinander und machen für jede gewürfelte Augenzahl ein Kreuz in die entsprechende Zeile. Nun betrachten wir die Spalten. In der letzten Spalte darf nur ein Kreuz bei der 1 sein, da sie häufiger als jede einzelne der anderen Zahlen gewürfelt wurde. In den anderen Spalten bilden wir jeweils den Durchschnitt der Zahlen, bei denen ein Kreuz steht. Der Durchschnitt bei Spalten mit nur 1 und 6 wäre 3,5, bei 1, 5 und 6 wäre er 4, bei 1, 4, 5 und 6 wäre er auch 4. Sind die Spalten anders, ist ihr Durchschnitt kleiner als 4. Der Durchschnitt aller 17 Zahlen, die nicht zur letzten Spalte gehören, ist somit nicht grösser als 4. Das heisst, dass die Summe aller 18 Augenzahlen nicht grösser als $4 \cdot 17 + 1 = 69$ ist. Die Summe 69 ist tatsächlich möglich: $2 \cdot (1 + 4 + 5 + 6) + 3 \cdot (1 + 5 + 6) + 1 = 69$.

30. Russland Olya war im Park spazieren. Die Hälfte der Zeit ging sie mit einer Geschwindigkeit von 2 km/h. Die Hälfte der Strecke ging sie mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h. Und den Rest der Zeit ging sie mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h. Welchen Bruchteil der Gesamtzeit ging sie mit 4 km/h?

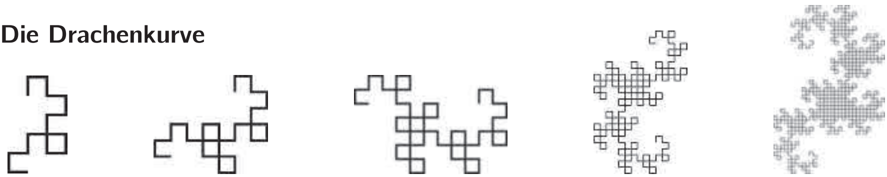
(**A**) $\frac{1}{7}$ (**B**) $\frac{1}{12}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{14}$

Lösung: Olyas Gesamtzeit im Park sei t h und die Zeit, die sie mit 4 km/h unterwegs war, sei x h. Wir bestimmen ausgehend von den Geschwindigkeiten und den jeweils benötigten Zeiten die zurückgelegten Wegstrecken und nutzen dabei, dass bei einer gleichförmigen Bewegung der zurückgelegte Weg das Produkt aus der konstanten Geschwindigkeit und der benötigten Zeit ist.
Olya war $\frac{t}{2}$ h mit 2 km/h unterwegs und hat dabei $2\,\text{km/h} \cdot \frac{t}{2}\,\text{h} = t$ km zurückgelegt. Sie war $\left(\frac{t}{2} - x\right)$ h mit 3 km/h unterwegs und hat dabei $3\,\text{km/h} \cdot \left(\frac{t}{2} - x\right)\text{h} = \left(\frac{3t}{2} - 3x\right)$ km zurückgelegt. Und sie war x h mit 4 km/h unterwegs und hat dabei $4\,\text{km/h} \cdot x\,\text{h} = 4x$ km zurückgelegt.
Da Olya mit 3 km/h die Hälfte der Gesamtstrecke ging, gilt $\left(\frac{3t}{2} - 3x\right)\text{km} = t\,\text{km} + 4x\,\text{km}$, also $\frac{t}{2}\,\text{km} = 7x\,\text{km}$, woraus $x = \frac{1}{14}t$ folgt. Also ging sie $\frac{1}{14}$ der Gesamtzeit mit 4 km/h.

Fraktale falten

Auf der Titelseite der Broschüre ist ein *Fraktal* zu sehen, und was das ist, ist auf der Rückseite erklärt. Fraktale entstehen meist schrittweise nach einer einfachen Regel – und man kann sogar Fraktale falten! Nimm einen langen Papierstreifen zur Hand, zum Beispiel von einem DIN-A4-Blatt, und falte eine *Drachenkurve* oder eine *Pfeilspitzen-Kurve*.

Die Drachenkurve



4. Ordnung 5. Ordnung 6. Ordnung 8. Ordnung 10. Ordnung 14. Ordnung

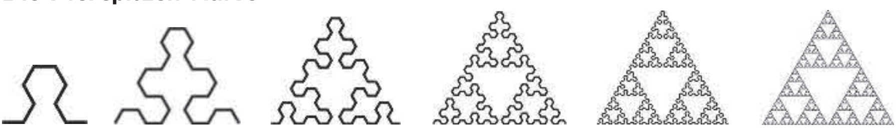
So erhalten wir eine Drachenkurve 4. Ordnung:

1. Falte den Papierstreifen einmal in der Mitte, sodass der entstehende Streifen genau halb so lang ist wie der Streifen zu Beginn.
2. Wiederhole Schritt 1 sooft, dass du insgesamt 4-mal gefaltet hast. Achte dabei darauf, dass du immer in dieselbe Richtung faltest, und streiche die Kanten stets ordentlich glatt.
3. Falte den Papierstreifen nun langsam auseinander. Zieh den Streifen so zurecht, dass an jeder Faltlinie ein rechter Winkel ist.
4. Stell den aufgefalteten Streifen seitlich hin und voilà: Fertig ist die Drachenkurve 4. Ordnung!

Achte darauf, dass wie in der Abbildung oben ein Quadrat zu sehen ist. Wenn die Kanten der Kurve im Vergleich zur Abbildung etwas auseinander stehen, falte sie nochmal nach. Wer das Papier auf die andere Seite stellt, erhält eine spiegelbildliche Version der Kurve, wie sie oben abgebildet ist.

Für die Drachenkurve 5. Ordnung muss 5-mal gefaltet werden. Höhere Ordnungen sind schwierig zu falten. Eine Drachenkurve 6. Ordnung lässt sich jedoch auch aus zwei Drachenkurven 5. Ordnung zusammensetzen. Mit dem Computer lassen sich Drachenkurven höherer Ordnung zeichnen.

Die Pfeilspitzen-Kurve



2. Ordnung 3. Ordnung 4. Ordnung 5. Ordnung 6. Ordnung 9. Ordnung

So erhalten wir eine Pfeilspitzen-Kurve 3. Ordnung:

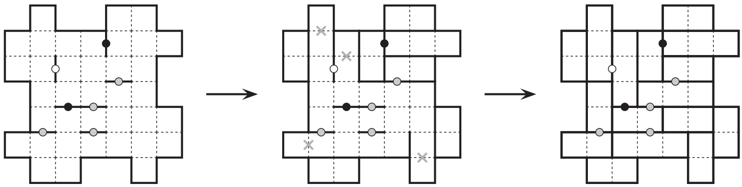
1. Falte die beiden äusseren Drittel des Papierstreifens auf das mittlere Drittel. Es kann hilfreich sein, sich vorher die Linien zu markieren, an denen der Streifen gefaltet werden muss.
2. Führe Schritt 1 insgesamt 3-mal aus. Streiche die Kanten immer ordentlich glatt.
3. Falte den Papierstreifen nun langsam auseinander. Zieh den Steifen so zurecht, dass an jeder Faltlinie ein 120-Grad-Winkel ist.
4. Stell den aufgefalteten Streifen seitlich hin und voilà: Fertig ist die Pfeilspitzen-Kurve 3. Ordnung!

Höhere Ordnungen als die 3. Ordnung sind schwierig zu falten. Eine Pfeilspitzen-Kurve 4. Ordnung lässt sich jedoch aus drei Pfeilspitzen-Kurven 3. Ordnung zusammensetzen. Mit dem Computer lassen sich Pfeilspitzen-Kurven höherer Ordnung zeichnen, und überraschenderweise können wir dabei ein anderes bekanntes Fraktal wiederentdecken: das Sierpinski-Dreieck, das eigentlich anders gebildet wird.

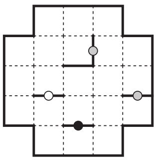
Voxas

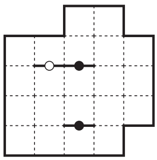
Die folgenden Diagramme sollen entlang der gestrichelten Linien in Rechtecke zerlegt werden. Dabei soll jedes Rechteck aus 2 oder aus 3 Kästchen bestehen. Haben zwei Rechtecke eine gemeinsame Kante, auf der ein weißer Kreis liegt, so müssen diese beiden Rechtecke die gleiche Größe und die gleiche Orientierung haben. Haben zwei Rechtecke eine gemeinsame Kante, auf der ein schwarzer Kreis liegt, so dürfen diese beiden Rechtecke weder die gleiche Größe noch die gleiche Orientierung haben. Und haben zwei Rechtecke eine gemeinsame Kante, auf der ein grauer Kreis liegt, so müssen diese beiden Rechtecke entweder die gleiche Größe oder die gleiche Orientierung haben, aber nicht beides gleichzeitig.

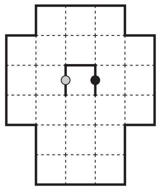
Hier ist ein Beispiel:

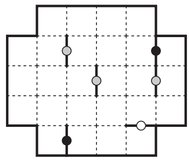


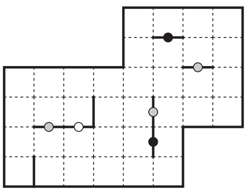
Wer findet die richtigen Zerlegungen?

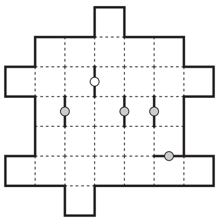


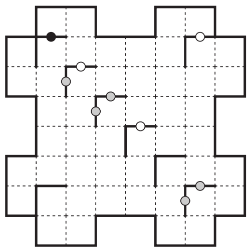


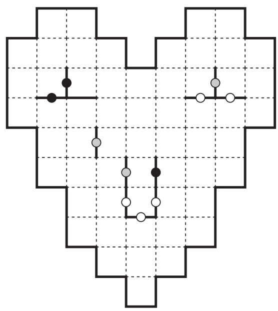


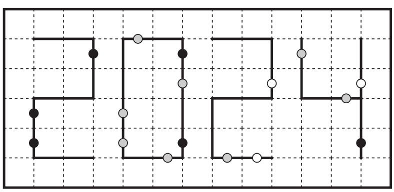




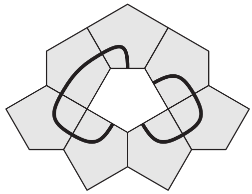






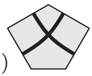
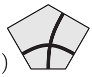


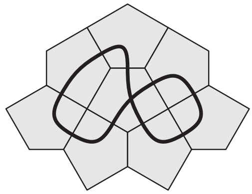
Klassenstufen 11 bis 13



1. Welches der folgenden Teile passt so in die Mitte des Puzzles, dass dabei eine sich kreuzende, geschlossene Linie entsteht?

Slowenien

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 



Lösung: Jedes der Puzzleteile passt in die Mitte, wenn es um 180° gedreht wird. Damit eine geschlossene Linie entsteht, darf auf dem Puzzleteil keine Linie an der unteren rechten Seite enden, denn sonst würde diese nach dem Drehen um 180° im Puzzle im Leeren enden. Das ist nur bei (**A**) der Fall, dieses ist das gesuchte Teil.
Rechts ist das vollständige Puzzle abgebildet.

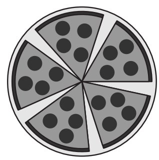
— Ein ähnliches Puzzle gab es in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 4. —

2. Welche der folgenden Zahlen ist um 2 kleiner als ein Vielfaches von 10, um 2 grösser als eine Quadratzahl und doppelt so gross wie eine Primzahl?

Grossbritannien

(**A**) 52 (**B**) 78 (**C**) 6 (**D**) 38 (**E**) 18

Lösung: Von den Antworten hat nur die 38 die geforderten drei Eigenschaften: $38 + 2 = 40$ ist ein Vielfaches von 10, $38 - 2 = 36 = 6^2$ ist eine Quadratzahl und $38 : 2 = 19$ ist eine Primzahl.



3. Mattis hat eine Pizza in sechs gleich grosse Stücke geschnitten. Nachdem er ein Stück gegessen hat, ordnet er die restlichen Stücke so an, dass die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich gross sind. Wie groß ist jeweils der Winkel, den zwei benachbarte Stücke einschliessen?

Deutschland

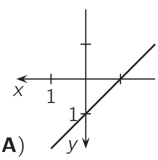
(**A**) 5° (**B**) 8° (**C**) 9° (**D**) 10° (**E**) 12°

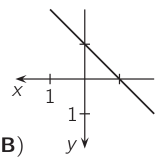
Lösung: Die 6 Pizzastücke sind gleich gross und somit ist der Winkel an der Spitze jedes Pizzastücks $360° : 6 = 60°$ gross. Da nun ein Stück fehlt, ist die Summe der 5 Winkel, die jeweils zwei benachbarte Stücke einschliessen, gleich 60°. Und da die Lücken zwischen benachbarten Stücken alle gleich gross sind, ist der Winkel, den zwei benachbarte Stücke einschliessen, $60° : 5 = 12°$ gross.

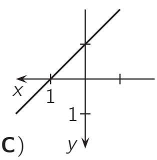
— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 14 zu lösen. —

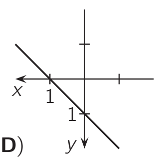
4. Patricia hat ein ungewöhnliches Koordinatensystem gezeichnet. Die x-Achse zeigt nach links und die y-Achse nach unten. Wie sieht der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = x + 1$ in diesem Koordinatensystem aus?

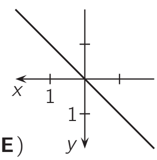
Finnland

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

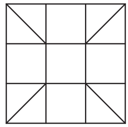
(**D**) 

(**E**) 

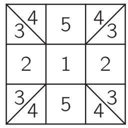
Lösung: Wenn wir das Blatt auf den Kopf stellen, sehen wir ein gewöhnliches Koordinatensystem. So erkennen wir leicht, dass (**A**) die Lösung ist.
Die Lösung erhalten wir auch, indem wir zwei verschiedene Punkte finden, durch die die Gerade verläuft. Zum Beispiel ist $f(-1) = 0$ und $f(0) = 1$, also muss die Gerade durch die Punkte $(-1 \mid 0)$ und $(0 \mid 1)$ verlaufen. Das ist nur bei (**A**) der Fall.

5. Annika möchte alle dreieckigen und quadratischen Gebiete in der Abbildung ausmalen. Dabei sollen Gebiete, die an mindestens einem Punkt aneinandergrenzen, verschiedene Farben haben. Was ist die kleinste Anzahl an Farben, die Annika benötigt?

Finnland



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7



Lösung: An den Ecken des mittleren Quadrats grenzen jeweils 5 Gebiete aneinander. Also reichen weniger als 5 Farben nicht aus. Eine Möglichkeit, wie Annika die Gebiete mit 5 Farben ausmalen kann, ist im Bild rechts dargestellt. Somit ist 5 die kleinste Anzahl an Farben, die Annika benötigt.

6. Kaito hat einen Spielwürfel manipuliert. Die Wahrscheinlichkeit, eine 2, 3, 4 oder 5 zu würfeln, ist immer noch jeweils $\frac{1}{6}$. Aber die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, ist nun doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit, eine 1 zu würfeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln?

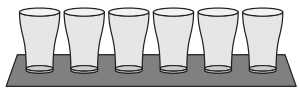
Deutschland

(**A**) $\dfrac{1}{4}$ (**B**) $\dfrac{7}{36}$ (**C**) $\dfrac{1}{5}$ (**D**) $\dfrac{5}{18}$ (**E**) $\dfrac{2}{9}$

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, eine 1 <u>oder</u> eine 6 zu würfeln, ist wie bei einem fairen Würfel $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit p_6, eine 6 zu würfeln, ist doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit p_1, eine 1 zu würfeln. Also ist $\frac{1}{3} = p_1 + p_6 = \frac{1}{2} \cdot p_6 + p_6 = \frac{3}{2} \cdot p_6$, und somit $p_6 = \frac{1}{3} : \frac{3}{2} = \frac{2}{9}$.

7. Eren stellt 6 Gläser wie abgebildet auf den Tisch. In einem Schritt sucht er sich genau 4 dieser Gläser aus und dreht sie alle um. Was ist die kleinste Anzahl an Schritten, die Eren braucht, damit am Ende alle 6 Gläser verkehrt herum auf dem Tisch stehen?

China



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Nach dem 1. Schritt stehen noch 2 Gläser richtig herum und 4 stehen verkehrt herum auf dem Tisch. Also reicht ein Schritt nicht aus.
Im 2. Schritt kann Eren bei seiner Auswahl entweder 0, 1 oder 2 der richtig herum stehenden Gläser auswählen. Nach dem 2. Schritt stehen folglich entweder 6, 4 oder 2 Gläser richtig herum. Also reichen auch 2 Schritte nicht aus.
Wählt Eren im 2. Schritt genau ein richtig herum stehendes Glas aus, kann er im 3. Schritt die 4 richtig herum stehenden Gläser umdrehen. Also ist 3 die kleinste Anzahl an Schritten, die Eren braucht.

8. $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15} =$

Russland

(**A**) 4^{19} (**B**) 4^{23} (**C**) 4^{31} (**D**) 4^{46} (**E**) 4^{60}

Lösung: Wir schreiben die Summe als Produkt und wenden anschliessend die Potenzgesetze an:

$$16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15} = 4 \cdot 16^{15} = 4 \cdot (4^2)^{15} = 4 \cdot 4^{2 \cdot 15} = 4 \cdot 4^{30} = 4^{31}.$$

9. Nora, Michelle und Pauline sind Drillinge. Ihre Lehrerin will wissen: „Wer von euch ist die Älteste?“ Nora antwortet: „Ich bin nicht die Älteste.“ Michelle antwortet: „Ich bin die Älteste.“ Pauline antwortet: „Ich bin nicht die Jüngste.“ Die drei haben sich einen Spass gemacht, nur eine von ihnen hat die Wahrheit gesagt. In welcher Reihenfolge wurden die drei Mädchen geboren?

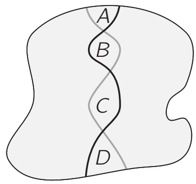
Georgien

(**A**) Nora, Michelle, Pauline (**B**) Michelle, Nora, Pauline (**C**) Pauline, Nora, Michelle
(**D**) Pauline, Michelle, Nora (**E**) Nora, Pauline, Michelle

Lösung: Wenn Noras Aussage wahr wäre, so wäre sie nicht die Älteste. Die Aussagen von Michelle und Pauline wären dann beide falsch. Das heißt, dass Michelle nicht die Älteste ist, und, dass Pauline die Jüngste ist. In diesem Fall ist keine der Drei die Älteste, was nicht sein kann.
Folglich ist die Aussage von Nora falsch, und sie ist somit die Älteste. Daraus folgt, dass Michelle nicht die Älteste ist, und somit ist auch die Aussage von Michelle falsch. Also muss die Aussage von Pauline wahr sein. Pauline ist also nicht die Jüngste. Sie muss somit die Mittlere sein, und Michelle ist die Jüngste. Die Reihenfolge lautet Nora, Pauline, Michelle.

10. Sowohl die schwarze als auch die graue Linie teilen die abgebildete Fläche jeweils in zwei gleich grosse Teile. A, B, C und D sind die Flächeninhalte der vier mittleren Gebiete. Welche Aussage ist sicher richtig?

Griechenland



(**A**) $A + D = B + C$ (**B**) $A = D$ (**C**) $C = A + B + D$
(**D**) $A + C = B + D$ (**E**) $A + B = C + D$

Lösung: Den Flächeninhalt der Fläche links der beiden Wege bezeichnen wir mit X. Dann ist $X + A + C$ der Flächeninhalt des Teils, das links des schwarzen Weges liegt, und $X + B + D$ ist der Flächeninhalt des Teils, das links des grauen Weges liegt. Beide Teile sind jeweils halb so gross wie die gesamte Fläche, insbesondere sind diese beiden Teile gleich gross. Somit gilt $X+A+C = X+B+D$, das heisst $A + C = B + D$.

11. Peter hat viele schwarze und weiße Würfel derselben Grösse. Er möchte 27 dieser Würfel zu einem grösseren $3\times3\times3$ Würfel zusammensetzen. Genau die Hälfte der Oberfläche dieses Würfels soll schwarz sein. Welches ist die kleinste Anzahl an schwarzen Würfeln, die Peter dafür verwenden muss?

Österreich

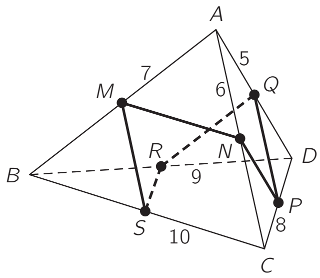
(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Die Oberfläche des $3\times3\times3$-Würfels wird aus $6 \cdot (3 \cdot 3) = 54$ Seitenflächen der kleinen Würfel gebildet. Davon sollen genau $54 : 2 = 27$ schwarz sein. Von den kleinen Würfeln an den 8 Ecken gehören jeweils 3 Seitenflächen zur Oberfläche des grossen Würfels. Von den kleinen Würfeln in den Mitten der 12 Kanten gehören jeweils 2 Seitenflächen zur Oberfläche. Von den kleinen Würfeln in den Mitten der 6 Seitenflächen gehört jeweils 1 Seitenfläche zur Oberfläche. Und vom kleinen Würfel ganz im Inneren gehört keine Seitenfläche zur Oberfläche.
Für die kleinstmögliche Anzahl an schwarzen Würfeln müssen von diesen möglichst viele Seitenflächen zur Oberfläche des grossen Würfels gehören. Verwendet man für alle 8 Ecken jeweils einen schwarzen Würfel, gehören von ihnen insgesamt 24 Seitenflächen zur Oberfläche. Das sind nicht genug, 8 schwarze Würfel reichen also nicht aus. Auch 9 schwarze Würfel reichen nicht, da von ihnen maximal $8 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 26$ Seitenflächen zur Oberfläche gehören. Mit 10 schwarzen Würfeln kann Peter es schaffen, indem er sie entweder an die 8 Ecken, an 1 Kante und in 1 Seitenmitte setzt oder an 7 Ecken und an 3 Kanten setzt. Somit ist 10 die kleinste Anzahl an schwarzen Würfeln, die Peter verwenden muss.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 25 zu lösen. —

12. Griechenland

Die Pyramide $ABCD$ hat die Kantenlängen $|AD| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$, $|AB| = 7\,\text{cm}$, $|CD| = 8\,\text{cm}$, $|BD| = 9\,\text{cm}$, $|BC| = 10\,\text{cm}$. Die Punkte M, N, P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der Kanten. Wie lang ist der eingezeichnete Rundweg $MNPQRSM$?



(**A**) 19 cm (**B**) 20 cm (**C**) 21 cm (**D**) 22 cm (**E**) 23 cm

Lösung: Die Abschnitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten des Rundweges sind jeweils Mittelparallelen auf der entsprechenden Pyramidenseite. Da in einem Dreieck jede Mittelparallele halb so lang ist wie die zu ihr parallele Seite, gilt: $|MN| = 5\,\text{cm}$, $|NP| = 2{,}5\,\text{cm}$, $|PQ| = 3\,\text{cm}$, $|QR| = 3{,}5\,\text{cm}$, $|RS| = 4\,\text{cm}$, $|SM| = 3\,\text{cm}$. Der Rundweg ist also $(5 + 2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4 + 3)\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$ lang.

13. Finnland

Gegeben ist eine natürliche Zahl n. Genau eine der folgenden Aussagen über n ist wahr, und die anderen vier sind falsch. Welche Aussage ist die wahre Aussage?

(**A**) n ist durch 3 teilbar (**B**) n ist durch 6 teilbar (**C**) n ist eine Primzahl
(**D**) $n = 2$ (**E**) n ist ungerade

Lösung: Wäre (**B**) (n ist durch 6 teilbar) wahr, so wäre auch (**A**) (n ist durch 3 teilbar) wahr. Also ist (**B**) falsch: n ist nicht durch 6 teilbar.
Wäre (**D**) ($n = 2$) wahr, so wäre auch (**C**) (n ist eine Primzahl) wahr. Also ist (**D**) falsch: $n \neq 2$.
Wäre (**C**) (n ist eine Primzahl) wahr, so wäre – da $n \neq 2$ – auch (**E**) (n ist ungerade) wahr. Also ist (**C**) falsch: n ist keine Primzahl.
Wäre (**A**) (n ist durch 3 teilbar) wahr, so müsste (**E**) (n ist ungerade) falsch sein. Das würde aber bedeuten, dass n gerade ist und damit wäre auch (**B**) (n ist durch 6 teilbar) wahr. Also ist auch (**A**) falsch: n ist nicht durch 3 teilbar.
Somit kann nur (**E**) wahr sein. Zum Beispiel würde auf $n = 25$ nur die Aussage bei (**E**) zutreffen.

14. Griechenland

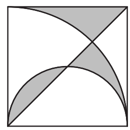
Seyma hat die Zahlen 6 und 15 jeweils mehrfach aufgeschrieben und dann ihr Produkt berechnet. Eine der folgenden Multiplikationen liefert ebenfalls das Ergebnis, das Seyma erhalten hat. Welche?

(**A**) $2^8 \cdot 3^8 \cdot 5^8$ (**B**) $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{10}$ (**C**) $2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^8$ (**D**) $2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^5$ (**E**) $2^5 \cdot 3^{15} \cdot 5^3$

Lösung: Mit jeder 6 ($= 2 \cdot 3$), die Seyma multipliziert, erhöhen sich die Exponenten von 2 und 3 in der Primfaktorzerlegung des Produkts jeweils um 1. Mit jeder 15 ($= 3 \cdot 5$), die Seyma multipliziert, erhöhen sich die Exponenten von 3 und 5 jeweils um 1. Da der Primfaktor 3 sowohl in der 6 als auch in der 15 vorkommt, muss der Exponent von 3 gleich der Summe der Exponenten von 2 und von 5 sein. Das ist nur bei (**D**) der Fall.

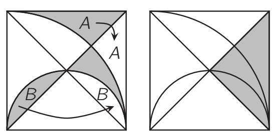
15. Russland

In ein Quadrat mit Seitenlänge 6 cm wurden eine Diagonale, ein Halbkreis und ein Viertelkreis eingezeichnet (s. Abb.). Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?



(**A**) $12\,\text{cm}^2$ (**B**) $\frac{10}{3}\pi\,\text{cm}^2$ (**C**) $3\pi\,\text{cm}^2$ (**D**) $9\,\text{cm}^2$ (**E**) $(6\pi - 9)\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir zeichnen die zweite Diagonale des Quadrats ein. Dann gilt wegen der Symmetrie: Die beiden mit A beschrifteten Felder sind zueinander kongruent und die beiden mit B beschrifteten Felder sind zueinander kongruent. Der Flächeninhalt der grauen Fläche ist somit im rechts abgebildeten Quadrat genauso gross wie im links abgebildeten. Der Flächeninhalt der grauen Fläche ist folglich ein Viertel des Flächeninhalts des Quadrats, also $(6\,\text{cm})^2 : 4 = 9\,\text{cm}^2$.



16. Es seien p und q positive Zahlen mit $p < q$. Welcher der folgenden Brüche hat den grössten Wert?

Grossbritannien

(**A**) $\frac{p+3q}{4}$ (**B**) $\frac{p+2q}{3}$ (**C**) $\frac{p+q}{2}$ (**D**) $\frac{2p+q}{3}$ (**E**) $\frac{3p+q}{4}$

Lösung: Wenn wir die Brüche alle auf den Hauptnenner 12 bringen, so sind ihre Zähler (**A**) $3p+9q$, (**B**) $4p+8q$, (**C**) $6p+6q$, (**D**) $8p+4q$, (**E**) $9p+3q$. Wegen $p < q$, gilt $9p+3q < 8p+4q < 6p+6q < 4p+8q < 3p+9q$. Der Wert bei (**A**) ist somit am grössten.
Die Aufgabe können wir auch lösen, indem wir die Brüche als arithmetische Mittel von 4 bzw. 3 bzw. 2 Zahlen interpretieren. Bei (**A**) stehen im Zähler die Summanden p, q, q, q. Hier ist die Anzahl der Summanden q im Verhältnis zur Anzahl der Summanden p am grössten. Also ist der Durchschnitt der Zahlen im Zähler bei (**A**) am grössten.

17. Zuzanna hat Steinpilze gesammelt und möchte sie im Ofen bei niedriger Temperatur trocknen. Frische Steinpilze bestehen zu 90 % aus Wasser. Nach einiger Zeit im Ofen macht das Wasser nur noch 20 % der Masse aus. Um wie viel Prozent hat sich die Masse der Pilze dabei verringert?

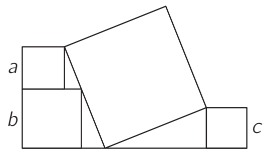
Ungarn

(**A**) um 72,5 % (**B**) um 75 % (**C**) um 85 % (**D**) um 87,5 % (**E**) um 90 %

Lösung: Die Masse der Steinpilze zu Beginn bezeichnen wir mit m. Da die Pilze zu Beginn zu 90 % aus Wasser bestehen, ist der Anteil der Trockenmasse 10 %. Das heißt, die Trockenmasse ist gleich $\frac{1}{10}m$. Als das Wasser nur noch 20 % der Masse ausgemacht hat, hat der Trockenanteil 80 % der Masse ausgemacht. Folglich hatten die Pilze zu diesem Zeitpunkt die Masse $\frac{100\,\%}{80\,\%} \cdot \frac{1}{10}m = \frac{1}{8}m$. Die Masse hat sich also um $m - \frac{1}{8}m = \frac{7}{8}m$ verringert, das entspricht einem Anteil von $\frac{7}{8} = 0{,}875 = 87{,}5\,\%$.
Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir für die gesammelten Pilze eine Masse festlegen, zum Beispiel 100 g, und dann die Masse berechnen, die die Pilze nach einiger Zeit im Ofen haben.

18. Rechts sind vier Quadrate abgebildet. Die Seitenlängen der drei kleinen Quadrate sind a, b und c. Welche Seitenlänge hat das grosse Quadrat?

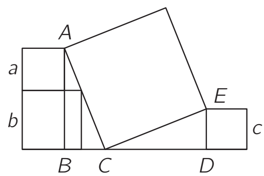
Griechenland



(**A**) $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ (**B**) $\frac{1}{2}(a+b+c)$

(**C**) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (**D**) $\sqrt{ab+bc+ac}$ (**E**) $\sqrt{(b-a)^2+c^2}$

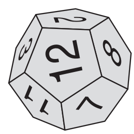
Lösung: Die Dreiecke ABC und CDE sind wegen $|AC| = |CE|$, $\measuredangle CBA = \measuredangle EDC = 90°$, $\measuredangle BAC = 180° - 90° - \measuredangle ACB = \measuredangle DCE$ zueinander kongruent (sww). Also folgt aus dem Satz des Pythagoras:



$$|CE| = \sqrt{|CD|^2+|DE|^2} = \sqrt{|AB|^2+|DE|^2} = \sqrt{(a+b)^2+c^2}.$$

19. Henriette hat mehrere 12-seitige Spielwürfel. Die Seitenflächen sind mit den Zahlen von 1 bis 12 beschriftet. Wenn Henriette alle Spielwürfel gleichzeitig würfelt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der Spielwürfel eine 12 zeigt, genauso gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Spielwürfel eine 12 zeigt. Wie viele 12-seitige Spielwürfel hat Henriette?

Australien



(**A**) 5 (**B**) 8 (**C**) 11 (**D**) 18 (**E**) 23

Lösung: Es sei N die Anzahl der 12-seitigen Spielwürfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln keine 12 dabei ist, ist $\left(\frac{11}{12}\right)^N$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln genau eine 12 dabei ist, ist $N \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{N-1}$, da einer der N Würfel eine 12 zeigt und die anderen $N-1$ nicht. Diese beiden Werte sind gleich, also gilt $\left(\frac{11}{12}\right)^N = N \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{N-1}$. Dividieren wir beide Seiten durch $\left(\frac{11}{12}\right)^{N-1}$, so erhalten wir $\frac{11}{12} = N \cdot \frac{1}{12}$, also $N = 11$.

20. Wenn man bei der 4-stelligen Zahl $N = \overline{pqrs}$ zwischen q und r ein Dezimalkomma setzt, so erhält man den Durchschnitt (arithmetisches Mittel) der beiden 2-stelligen Zahlen $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$. Welche Quersumme hat N?

Australien

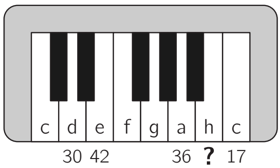
(**A**) 14 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 25 (**E**) 27

Lösung: Wenn man bei N zwischen q und r ein Dezimalkomma setzt, so erhält man $\overline{pq{,}rs}$, was gleich $\overline{pq}+\frac{\overline{rs}}{100}$ ist. Da dieser Wert gleich dem Durchschnitt von $\overline{pq}$ und $\overline{rs}$ ist, gilt $\overline{pq}+\frac{\overline{rs}}{100} = \frac{\overline{pq}+\overline{rs}}{2}$ und somit $100 \cdot \overline{pq} + \overline{rs} = 50 \cdot \overline{pq} + 50 \cdot \overline{rs}$ bzw. $50 \cdot \overline{pq} = 49 \cdot \overline{rs}$. Daraus folgt, dass $\overline{rs}$ ein Vielfaches von 50 sein muss, weil 49 und 50 teilerfremd sind. Somit ist entweder $\overline{rs} = 0$ oder $\overline{rs} = 50$, da $\overline{rs}$ höchstens 2-stellig ist. Wäre $\overline{rs} = 0$, so wäre auch $\overline{pq} = 0$ und damit auch $N = 0$. Das widerspricht der Bedingung aus der Aufgabenstellung, dass N eine 4-stellige Zahl ist. Also ist $\overline{rs} = 50$ und somit $\overline{pq} = 49$. Das heißt $N = 4950$, und N hat die Quersumme $4 + 9 + 5 + 0 = 18$.
Wer erkennt, dass der Durchschnitt von zwei natürlichen Zahlen entweder eine natürliche Zahl oder um 0,5 größer als eine natürliche Zahl ist, sieht direkt, dass entweder $\overline{rs} = 0$ oder $\overline{rs} = 50$ gilt. Im ersten Fall wäre dann $\overline{pq}{,}00 = \frac{\overline{pq}+0}{2}$, also $\overline{pq} = 0$ und somit $N = 0$. Im zweiten Fall erhalten wir $\overline{pq}{,}50 = \frac{\overline{pq}+50}{2}$. Das können wir umformen zu $2 \cdot \overline{pq} + 1 = \overline{pq} + 50$, und weiter zu $\overline{pq} = 49$. Also ist $N = 4950$, und N hat die Quersumme 18.

Unter 2024 natürlichen Zahlen lassen sich stets einige finden, deren Summe durch 2024 teilbar ist. Ist das richtig oder nicht?

21. Joseph hat seiner Nichte zum zweiten Geburtstag ein Kinder-Klavier geschenkt. Sie probiert es gleich aus und schlägt wieder und wieder mit der ganzen Hand auf die Tasten. Dabei drückt sie immer 4 benachbarte weisse Tasten auf einmal. Das d drückt sie insgesamt 30 Mal, das e 42 Mal, das a 36 Mal und das hohe c 17 Mal. Wie oft hat sie das h gedrückt?

Griechenland



(**A**) 19 Mal (**B**) 24 Mal (**C**) 27 Mal (**D**) 32 Mal (**E**) 35 Mal

Lösung: Josephs Nichte hat immer 4 benachbarte Tasten auf einmal gedrückt: x_1 Mal „c-d-e-f“, x_2 Mal „d-e-f-g“, x_3 Mal „e-f-g-a“, x_4 Mal „f-g-a-h“, x_5 Mal „g-a-h-c“.
Das d hat sie 30 Mal gedrückt, also gilt $30 = x_1 + x_2$, da das d nur bei den ersten beiden Varianten dabei ist. Das e hat sie 42 Mal gedrückt, also gilt $42 = x_1 + x_2 + x_3$. Folglich ist $x_3 = 42 - 30 = 12$. Das a hat sie 36 Mal gedrückt, also gilt $36 = x_3 + x_4 + x_5 = 12 + x_4 + x_5$ bzw. $x_4 + x_5 = 24$. Das h hat sie $x_4 + x_5$ Mal, also 24 Mal gedrückt.
Eine andere Möglichkeit ist, die Anzahl zu bestimmen, wie oft die Nichte insgesamt 4 Tasten auf einmal gedrückt hat. Bei jedem Drücken war entweder das d (1.-4. oder 2.-5. Taste) oder das a (3.-6., 4.-7. oder 5.-8. Taste) dabei, aber nie beide gleichzeitig. Sie hat das d 30 Mal und das a 36 Mal gedrückt. Somit hat sie insgesamt $(30 + 36 =)$ 66 Mal 4 Tasten auf einmal gedrückt. Genauso war bei jedem Drücken entweder das e oder das h dabei. Da sie das e 42 Mal gedrückt hat, hat sie das h $(66 - 42 =)$ 24 Mal gedrückt.

22. Es sind a, b und c drei verschiedene ganze Zahlen ungleich 0. Für die reelle Zahl x gilt sowohl $ax^2 + bx + c = 0$ als auch $bx^2 + ax + c = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist dann sicher wahr?

Australien

(**A**) $a + b + c = 0$ (**B**) $2bc = a^2$ (**C**) $ac = b$ (**D**) $a^2 - b^2 = c^2$ (**E**) $ab = c$

Lösung: Da $ax^2 + bx + c = 0$ und $bx^2 + ax + c = 0$ gelten, folgt $ax^2 + bx + c = bx^2 + ax + c$ und somit $(a - b)x^2 = (a - b)x$. Da a und b verschieden voneinander sind, dürfen wir beide Seiten der Gleichung durch $(a - b)$ teilen, und erhalten $x^2 = x$. Daraus folgt, dass $x = 0$ oder $x = 1$ gilt. Wäre $x = 0$, so wäre wegen $ax^2 + bx + c = 0$ auch $c = 0$. Das ist aber nach Voraussetzung nicht der Fall. Also gilt $x = 1$. Setzen wir diesen Wert in eine der beiden gegebenen Gleichungen ein, so erhalten wir $a + b + c = 0$, was bei (**A**) angegeben ist. Dass die anderen vier Aussagen nicht sicher wahr sind, zeigt das Beispiel $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

23. Zwei Kerzen mit gleicher Höhe sind verschieden dick. Sie werden gleichzeitig angezündet und brennen gleichmässig ab. Die eine Kerze brennt in genau 5 Stunden vollständig ab und die andere in 4 Stunden. Wie lange müssen die beiden Kerzen brennen, bis die eine Kerze 3-mal so hoch ist wie die andere?

Australien

(**A**) $\frac{40}{11}$ Stunden (**B**) $\frac{45}{12}$ Stunden (**C**) $\frac{63}{20}$ Stunden (**D**) $\frac{54}{17}$ Stunden (**E**) $\frac{47}{14}$ Stunden

Lösung: Es sei H die Höhe der beiden Kerzen zu Beginn. Die Geschwindigkeiten, mit der die Kerzen abbrennen, sind $\frac{H}{5\,\text{h}}$ und $\frac{H}{4\,\text{h}}$. Nun schreiben wir die Höhen der beiden Kerzen als Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t $(\leq 4\,\text{h})$: $H_1(t) = H - \frac{H}{5\,\text{h}} \cdot t$ und $H_2(t) = H - \frac{H}{4\,\text{h}} \cdot t$. Die zweite Kerze brennt schneller herunter als die erste, also suchen wir den Zeitpunkt t_0, bei dem $H_1(t_0) = 3 \cdot H_2(t_0)$ gilt. Wenn wir einsetzen, erhalten wir $H - \frac{H}{5\,\text{h}} \cdot t_0 = 3 \cdot \left(H - \frac{H}{4\,\text{h}} \cdot t_0\right)$. Das können wir zu $t_0 = \frac{40}{11}\,\text{h}$ umformen. Nach $\frac{40}{11}$ Stunden ist die erste Kerze 3-mal so hoch wie die zweite.

24. Tristan hat sechs Karten, bei denen auf der Vorderseite und auf der Rückseite jeweils eine Zahl steht. Die Zahlenpaare auf den sechs Karten sind $(5, 12)$, $(3, 11)$, $(0, 16)$, $(7, 8)$, $(4, 14)$ und $(9, 10)$. Tristan legt diese sechs Karten auf die abgebildeten freien Felder. Was ist das kleinste Ergebnis, das die Rechnung haben kann?

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

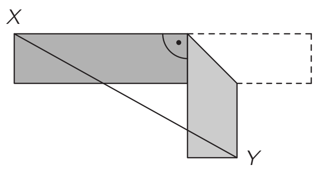
Tschechien

(**A**) -28 (**B**) -27 (**C**) -26 (**D**) -25 (**E**) -24

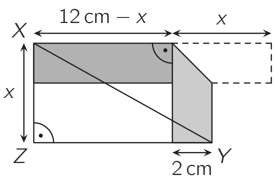
Lösung: Damit das Ergebnis der Rechnung so klein wie möglich wird, muss bei den drei Karten links (bei Plus) jeweils die kleinere der beiden Zahl zu sehen sein. Bei den drei Karten rechts (bei Minus) dagegen, muss jeweils die grössere der beiden Zahl zu sehen sein.
Wir berechnen für jede Karte, um wie viel sich das Ergebnis der Rechnung verändert, wenn man die Karte rechts (bei Minus) mit ihrem grösseren Wert statt links (bei Plus) mit ihrem kleineren Wert hinlegt: Bei $(5, 12)$ ist die Veränderung $-12 - 5 = -17$, bei $(3, 11)$ ist sie $-11 - 3 = -14$, bei $(0, 16)$ ist sie $-16 - 0 = -16$, bei $(7, 8)$ ist sie $-8 - 7 = -15$, bei $(4, 14)$ ist sie $-14 - 4 = -18$, bei $(9, 10)$ ist sie $-10 - 9 = -19$.
Die Veränderungen bei den drei Karten $(9, 10)$, $(4, 14)$ und $(5, 12)$ haben die kleinsten Werte. Diese drei Karten sind also rechts (bei Minus) hinzulegen, damit das Ergebnis der Rechnung so klein wie möglich wird. Die drei Karten $(3, 11)$, $(0, 16)$ und $(7, 8)$ sind links (bei Plus) hinzulegen. Das kleinste Ergebnis ist also $3 + 0 + 7 - 10 - 14 - 12 = -26$.

25. Ein rechteckiger Papierstreifen ist 12 cm lang und 2 cm breit. Das rechte Ende soll an einer Stelle so gefaltet werden, dass es senkrecht nach unten zeigt. Was ist der kleinste Abstand, den die Eckpunkte X und Y nach dem Falten haben können?

Australien



(**A**) $6\sqrt{2}$ cm (**B**) $7\sqrt{2}$ cm (**C**) 10 cm
(**D**) 8 cm (**E**) $(6 + \sqrt{2})$ cm



Lösung: Wir bezeichnen die Höhe der entstandenen Figur mit x. Das rechtwinklige Dreieck ZYX hat dann die Seitenlängen $|XZ| = x$, $|YZ| = 12\,\text{cm} - x + 2\,\text{cm} = 14\,\text{cm} - x$ und $|XY|$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$|XY| = \sqrt{x^2 + (14\,\text{cm} - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 28\,\text{cm} \cdot x + 196\,\text{cm}^2}\,.$$

Der Radikand $2x^2 - 28\,\text{cm} \cdot x + 196\,\text{cm}^2$ entspricht dem Funktionsterm einer nach oben geöffneten Parabel, die ihren kleinsten Wert im Scheitelpunkt erreicht. Die zugehörige Scheitelpunktform ist $2 \cdot (x - 7\,\text{cm})^2 + 98\,\text{cm}^2$, woraus wir den Scheitelpunkt $(7\,\text{cm}\,|\,98\,\text{cm}^2)$ ablesen können. Also ist der kleinste Abstand, den die Eckpunkte X und Y nach dem Falten haben können, $\sqrt{98\,\text{cm}^2} = \sqrt{2 \cdot 49}\,\text{cm} = 7\sqrt{2}\,\text{cm}$. Im Übrigen ist dies genau dann der Fall, wenn $|XZ| = |YZ|$ gilt.
Alternativ können wir das x, für das $2x^2 - 28\,\text{cm} \cdot x + 196\,\text{cm}^2$ minimal wird, ermitteln, indem wir nach x ableiten und die Ableitung 0 setzen: $(2x^2 - 28\,\text{cm} \cdot x + 196\,\text{cm}^2)' = 4x - 28\,\text{cm} = 0$. Dies wird nur von $x = 7\,\text{cm}$ erfüllt, und folglich kann $|XY|$ nur für $x = 7\,\text{cm}$ ein Minimum annehmen.

26. Die vierstellige Zahl $\overline{abcd}$ hat die Eigenschaft $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$. Welche Ziffer ist a?

Schweiz

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Wir berechnen die entsprechenden Potenzen der ersten natürlichen Zahlen: $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$, $4^4 = 256$, $5^5 = 3125$, $6^6 = 6 \cdot 6^5 > 6 \cdot 5^5 > 6 \cdot 3000 = 18000$. Also hat 6^6 bereits mehr als 4 Stellen. Die Ziffern a, b, c, d sind somit alle kleiner als 6, da die Summe $a^a + b^b + c^c + d^d = \overline{abcd}$ eine vierstellige Zahl ist.
Wären a, b, c, d alle kleiner als 5, so wäre $\overline{abcd} \leq 4 \cdot 4^4 = 1024$. Damit wäre $a = 1$. Daraus folgt aber, dass sogar $\overline{abcd} \leq 1^1 + 3 \cdot 4^4 = 769$ gilt, und somit $\overline{abcd}$ nicht vierstellig sein kann. Also ist mindestens eine der Ziffern eine 5. Wären zwei oder mehr der Ziffern Fünfen, so wäre $\overline{abcd} \geq 2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 1^1 = 6252$. Damit wäre $a \geq 6$, was wir oben schon ausgeschlossen haben. Also ist genau eine der Ziffern eine 5 und wir können abschätzen: $\overline{abcd} \geq 5^5 + 3 \cdot 1^1 = 3128$ und $\overline{abcd} \leq 5^5 + 3 \cdot 4^4 = 3893$. Folglich ist sicher $a = 3$. Die Zahl $\overline{abcd}$ lässt sich auch eindeutig bestimmen, sie lautet 3435.

27. Die Polynomfunktion p mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ erfüllt für alle reellen Zahlen x die Gleichung $p(x+1) = x^2 - x + 2 \cdot p(6)$. Dann ist $a + b + c =$

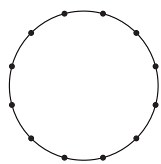
Griechenland

(**A**) −40 (**B**) −36 (**C**) −6 (**D**) 12 (**E**) 40

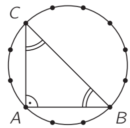
Lösung: In die Gleichung $p(x+1) = x^2 - x + 2 \cdot p(6)$ setzen wir $x = 5$ ein, damit auf der linken Seite $p(6)$ steht: $p(6) = p(5+1) = 5^2 - 5 + 2 \cdot p(6) = 20 + 2 \cdot p(6)$. So erhalten wir $p(6) = -20$.
Nun können wir auf verschiedene Weisen fortfahren. Hier sind zwei Varianten:
1. Variante: Wenn wir in dieselbe Gleichung nun $(x-1)$ und den berechneten Wert für $p(6)$ einsetzen, so erhalten wir: $p(x) = p((x-1)+1) = (x-1)^2 - (x-1) + 2 \cdot p(6) = (x^2 - 2x + 1) - x + 1 + 2 \cdot (-20) = x^2 - 3x - 38$. Somit ist $a + b + c = 1 + (-3) + (-38) = -40$.
2. Variante: Es gilt $p(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$. Also müssen wir $p(1)$ berechnen. Dafür setzen wir 0 in die Gleichung $p(x+1) = x^2 - x + 2 \cdot p(6)$ ein: $p(1) = p(0+1) = 0^2 - 0 + 2 \cdot p(6) = 2 \cdot p(6) = -40$.

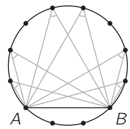
28. Auf einem Kreis wurden 12 Punkte eingezeichnet, die den Kreis in 12 gleich lange Bögen teilen. Wie viele Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte 3 der vorgegebenen Punkte sind und die mindestens einen Innenwinkel haben, der 45° gross ist?

Australien



(**A**) 48 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 84 (**E**) 96





Lösung: Jedes rechtwinklige, gleichschenklige Dreieck hat zwei Innenwinkel, die jeweils 45° gross sind. Solch ein Dreieck finden wir, indem wir zwei gegenüberliegende Punkte (einen Durchmesser des Kreises) verbinden und diese Strecke als Hypotenuse bzw. Basis verwenden (s. Bild oben). Da jeder der 12 Punkte die Spitze eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks sein kann, haben wir 12 passende Dreiecke gefunden – jeweils mit zwei 45°-Winkeln. Da den 45°-Winkeln jeweils eine Seite gegenüberliegt, deren Eckpunkte genau 3 der vorgegebenen Punkte voneinander entfernt sind, gilt nach dem Umfangswinkelsatz und seiner Umkehrung: Ein Dreieck, dessen Eckpunkte 3 der vorgegebenen Punkte sind, hat genau dann einen Innenwinkel der Grösse 45°, wenn 2 der Eckpunkte genau 3 Punkte voneinander entfernt sind und der dritte Eckpunkt auf dem grösseren der beiden Kreisbögen über dieser Sehne liegt. Zu jeder Sehne mit dieser Länge (im Bild ist das $\overline{AB}$), gibt es ausser den beiden rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken, die wir bereits gezählt haben, noch 6 weitere Dreiecke mit dieser als Seite, die einen 45°-Winkel haben (s. Bild unten). Somit gibt es $12 \cdot 6 = 72$ passende Dreiecke mit genau einem 45°-Winkel. Insgesamt sind es $12 + 72 = 84$ Dreiecke mit den gewünschten Eigenschaften.

— Eine andere Aufgabe mit einer ähnlichen Situation war Aufgabe 28 in Klassenstufe 9/10. —

29. Australien

Für die reellen Zahlen x, y, z gilt $2^x = 3$ und $2^y = 7$ und $6^z = 7$. Wie lässt sich z mithilfe von x und y berechnen?

(**A**) $z = \frac{x}{y} + 1$ (**B**) $z = \frac{y}{x} - 1$ (**C**) $z = \frac{x}{y-1}$ (**D**) $z = y - \frac{1}{x}$ (**E**) $z = \frac{y}{1+x}$

Lösung: Wir formen mithilfe der Potenzgesetze geschickt um: Es gilt $2^y = 7 = 6^z = (2 \cdot 3)^z = 2^z \cdot 3^z = 2^z \cdot (2^x)^z = 2^z \cdot 2^{xz} = 2^{z+xz}$. Da die Exponentialfunktion zur Basis 2 streng monoton wächst, müssen die beiden Exponenten y und $z + xz$ gleich sein. Somit gilt $y = z + xz = z \cdot (1 + x)$. Es gilt $x \neq -1$, da nach Voraussetzung $2^x = 3$ gilt und $2^{-1} = \frac{1}{2} \neq 3$ ist. Somit ist $(1 + x) \neq 0$ und wir dürfen beide Seiten der Gleichung durch $(1 + x)$ teilen. Wir erhalten $z = \frac{y}{1+x}$.

30. Taiwan

Emily und Daniel spielen ein Spiel. Auf ein Blatt Papier schreiben sie die natürlichen Zahlen von 1 bis 7. Abwechselnd suchen sie sich eine noch vorhandene Zahl aus und streichen diese und alle ihre Teiler durch. Wer die letzte Zahl durchstreicht, gewinnt. Emily beginnt, aber Daniel nutzt jede Möglichkeit, um am Ende selbst zu gewinnen. Welche Zahl muss sich Emily im ersten Zug aussuchen, damit sie das Spiel gewinnen kann?

(**A**) 5 oder 7 (**B**) 4 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

Lösung: Egal welche Zahl sich Emily im ersten Zug aussucht, es wird auf jeden Fall dabei die 1 gestrichen. Bei der 4 wird zusätzlich die 2 und bei der 6 werden zusätzlich die 2 und die 3 gestrichen. Würde Emily zu Beginn die 6 aussuchen, so blieben die Zahlen 4, 5, 7 übrig. Da keine dieser Zahlen ein Vielfaches einer anderen ist, streichen Emily und Daniel in den folgenden drei Zügen jeweils genau eine Zahl durch. So gewinnt Daniel.
Würde Emily zu Beginn die 4, die 5 oder die 7 aussuchen, so kann Daniel anschliessend die 6 aussuchen. So würden zwei Zahlen stehen bleiben: 5 und 7 bzw. 4 und 7 bzw. 4 und 5. Emily kann im nächsten Zug nicht beide Zahlen durchstreichen. Auch in diesem Fall gewinnt Daniel.
Würde Emily zu Beginn die 2 aussuchen, so blieben die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7 übrig. In diesem Fall wählt Daniel die 3. So blieben 4, 5, 6, 7 übrig, von denen jeweils eine in den folgenden vier Zügen gestrichen wird. Auch in diesem Fall gewinnt Daniel.
Würde Emily zu Beginn die 3 aussuchen, wählt Daniel umgekehrt zum letzten Fall die 2, und gewinnt. Es bleibt also nur die 1 als mögliche Zahl, um das Spiel zu gewinnen. Und tatsächlich kann Emily das auch, indem sie nach Daniels Zug so spielt, wie es oben für Daniel beschrieben ist.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	C	D	E	C	A	B	B	E	B

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	E	D	D	B	C	C	D	D	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	E	C	E	B	E	B	A	D	E

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	B	D	D	B	C	D	A	B	C

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	D	A	E	D	A	E	C	A	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	A	B	E	C	D	D	C	C	B	E

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	A	D	E	A	C	E	B	C	E	D

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	E	D	D	A	D	A	C	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	A	A	C	B	C	A	D	E	E

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.

2024

Das Titelbild ist dem Vater der fraktalen Geometrie, Benoît Mandelbrot, gewidmet. Er wäre in diesem Jahr 100 Jahre alt geworden.

Fraktale sind geometrische Objekte mit einer unendlich feinen, sich wiederholenden Struktur. Diese lässt sich durch Hineinzoomen entdecken. Ein Fraktal zeichnet sich dadurch aus, dass Teile davon ähnlich zum gesamten Objekt sind. Das kennen wir auch von realen Objekten wie Farnblättern, Blumenkohl, Schneeflocken, Küstenlinien, Wolken oder Sternhaufen in Galaxien. Fraktale sehen meist kompliziert aus. Sie entstehen aber oft nach einer einfachen Regel, so wie die Julia-Menge, die auf der Vorderseite zu sehen ist.

grafik | steffen blankenburg | elephant-castle.de

www.kaenguru-schweiz.ch
www.kangourou-suisse.ch