2023

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Wettbewerb Känguru der Mathematik 2023

Das starke Wachstum der Teilnehmerzahlen an unserem mathematischen Wettbewerb aber auch die zunehmende Digitalisierung, die sich in den Zahlen der online Teilnahmen zeigt, haben uns dazu bewogen ja geradezu gedrängt unsere Wettbewerbsorganisation sowohl physikalisch als auch elektronisch zu überdenken und neu zu organisieren. Da wir gute Kontakte zu den Organisatoren des Schweizer Informatik Wettbewerbs Biber haben, durften wir von deren Erfahrungen profitieren und sind deshalb auf die gleiche Plattform umgestiegen. Die anfänglichen Befürchtungen, dass wir durch diesen Systemwechsel Schulen verlieren könnten, haben sich nicht bestätigt im Gegenteil!

Dieses Jahr haben sich über 900 Schulen mit insgesamt über 57 000 Teilnehmenden angemeldet. Mit der Anmeldung bleibt offen, ob die Schule auf Papier teilnimmt oder online. Im ersten Fall mussten die Koordinatorinnen und Koordinatoren die Aufgabenblätter und die personalisierten Antwortblätter herunterladen und ausdrucken und letztere nach der Durchführung scannen und hochladen. Für die online Teilnahmen genügten die Logins, die man ebenfalls herunterladen, ausdrucken und vor dem Wettbewerb verteilen konnte.

Der riesige Sprung von letztes Jahr gut 6000 auf heuer fast 30 000 online Teilnahmen, was 12% bzw. jetzt 52% der Teilnehmenden entspricht, zeigt, dass dieser moderne Weg definitiv Einzug gefunden hat. Gemäss Rückmeldungen vieler Schulen an uns hat die Känguru Plattform dem Ansturm stand gehalten. Die Internet Schwierigkeiten einiger weniger Schulen sind ziemlich sicher auf deren lokale Netzwerke zurückzuführen.

Weltweit haben sich Kinder und Jugendliche in den fast 100 Ländern, die im internationalen Verein Kangourou sans frontières zusammenarbeiten, an den Aufgaben versucht. Das Interessante und die Vielgestaltigkeit der Aufgaben rühren vor allem daher, dass unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den verschiedenen Ländern und Kulturen einfliessen. In der Broschüre ist neu angegeben, aus welchen Ländern die Vorschläge für die Aufgaben kamen.

Känguru-Teilnehmerländer 2023

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, D. Hanzig, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, M. Cannizzo, S. Czekay, L. Fischer, B. Hell, Familie Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, B. Maier, Dr. A. Noack, N. Rhyner, S. Schlinske und Dr. D. Vigerske erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 10099 Berlin

Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

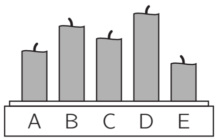
Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 3 und 4

1. Jonathan hat fünf gleiche Kerzen gleichzeitig angezündet. Dann hat er sie nach und nach wieder ausgepustet. Welche Kerze hat Jonathan <u>zuerst</u> ausgepustet?

Frankreich

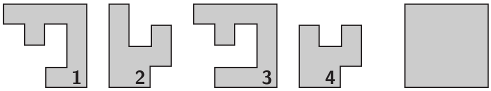


(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

Lösung: Die Kerze, die Jonathan zuerst ausgepustet hat, hat die geringste Zeitdauer gebrannt. Sie ist daher nun die längste. Das ist Kerze D.

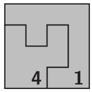
2. Aus welchen beiden Teilen kann das Quadrat gelegt werden?

Dänemark



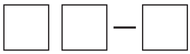
(**A**) 1 und 2 (**B**) 2 und 4 (**C**) 1 und 3
(**D**) 2 und 3 (**E**) 1 und 4

Lösung: Die gesuchten Teile sind 1 und 4. Bei allen anderen Kombinationen überlappen sich die Teile an mindestens einer Stelle oder es bleiben Lücken.



— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 4 zu lösen.* —

In jedes Kästchen rechts soll eine 1, eine 2 oder eine 3 eingetragen werden. Wie viele verschiedene Ergebnisse kann die Subtraktionsaufgabe haben?



3. Am Abend kehren alle 19 Ziegen auf den Bauernhof zurück. Es gibt zwei Ställe. Die 1. Ziege geht in den grossen Stall, die 2. in den kleinen, die 3. in den grossen, die 4. in den kleinen und so weiter. Wie viele Ziegen sind am Ende im grossen Stall?

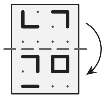
Philippinen

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 13

Lösung: Jede zweite Ziege geht in den kleinen Stall, und die anderen gehen in den grossen. Nachdem die 18. Ziege zurückgekehrt ist, sind in beiden Ställen gleich viele Ziegen, und zwar $18 : 2 = 9$. In der Reihe der Ziegen ist die 19. Ziege an einer ungeraden Position und geht daher in den grossen Stall. Im grossen Stall befinden sich am Ende also 10 Ziegen.

4. Fatima hat eine durchsichtige Folie wie im Bild rechts. Sie faltet sie entlang der gestrichelten Linie nach unten. Was ist nun zu sehen?

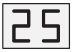
Dänemark



(**A**) 

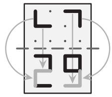
(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: Rechts ist dargestellt, wo sich die dicken Linien aus der oberen Hälfte nach dem Falten in der unteren Hälfte befinden. Es entsteht die Zahl 29 wie bei (**A**).



— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 6 zu lösen. —

5. Die fünf Kinder in unserem Haus heissen Sarah, Vito, Lena, Antonio und Henry. Sie sind 4, 5, 6, 7 und 8 Jahre alt. Vito ist der Jüngste. Lena ist 2 Jahre älter als Antonio und 1 Jahr jünger als Henry. Wie alt ist Sarah?

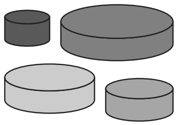
Polen

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Vito ist von den fünf Kindern das jüngste, er ist also 4 Jahre alt. Da Lena 2 Jahre älter als Antonio und 1 Jahr jünger als Henry ist, ist Henry 3 Jahre älter als Antonio. Dann ist Henry der Älteste und 8 Jahre alt, Antonio ist 5 Jahre alt, und Lena ist 7 Jahre alt. Es bleibt das Alter von 6 Jahren übrig, das ist das Alter von Sarah.

6. Leon will aus 3 der abgebildeten Scheiben einen Turm bauen. Die 3 Scheiben sollen von unten nach oben immer kleiner werden. Wie viele verschiedene Türme kann Leon bauen?

Slowenien



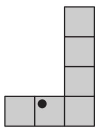
(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 8

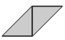
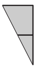
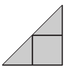
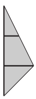
Lösung: Wir nummerieren die Scheiben von gross nach klein mit 1, 2, 3, 4. Egal, welche 3 Scheiben Leon wählt, er kann aus ihnen immer genau <u>einen</u> Turm bauen, der die Bedingung aus der Aufgabe erfüllt. Wir schreiben systematisch auf, welche 3 Scheiben Leon wählen kann: 1, 2, 3 oder 1, 2, 4 oder 1, 3, 4 oder 2, 3, 4. Immer genau eine der 4 Scheiben wählt er nicht. Also kann Leon genau 4 verschiedene Türme bauen.

— Ähnlich waren Aufgabe 6 in Klassenstufe 5/6 und Aufgabe 14 in Klassenstufe 7/8. —

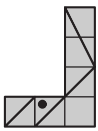
7. Die Figur rechts wird mit den fünf abgebildeten Teilen vollständig bedeckt. Welches Teil bedeckt dabei den schwarzen Punkt?

Griechenland



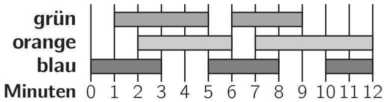
(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

Lösung: Wir zeichnen in die Figur nacheinander ein, wohin die angegebenen Teile gelegt werden müssen. Das Teil (**C**) muss in die Ecke unten rechts und das Teil (**E**) muss dann in den langen Teil nach oben. Die Lücke im langen Teil kann nur mit dem Teil (**B**) geschlossen werden. Die Teile (**A**) und (**D**) gehören in den kurzen Teil links unten. Das Teil (**A**) bedeckt den schwarzen Punkt.



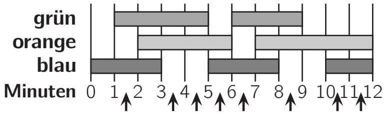
8. Slowakei

Die Klasse 3b führt ein Theaterstück in der Aula auf. Endlich werden die neuen bunten Scheinwerfer benutzt! Der Plan zeigt, wann welche Scheinwerfer leuchten. Wie viele Minuten der Gesamtzeit leuchten genau 2 Scheinwerfer gleichzeitig?



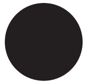
(**A**) 5 Minuten (**B**) 6 Minuten (**C**) 8 Minuten (**D**) 9 Minuten (**E**) 10 Minuten

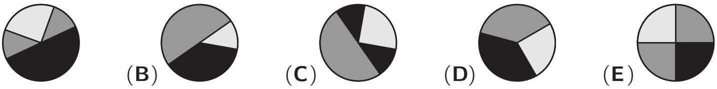
Lösung: Wir schauen uns den Plan aufmerksam an und markieren alle Abschnitte, wo genau zwei Scheinwerfer leuchten. Es sind 8 Abschnitte und somit genau 8 Minuten.



9. Deutschland

Frieda klebt die zwei Papierteile  auf den schwarzen Kreis, der rechts abgebildet ist. Was kann Frieda dabei <u>nicht</u> erhalten?





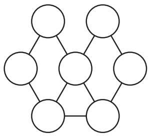
(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: In (**E**) müsste das dunkelgraue Papierteil grösser als ein Halbkreis sein. Dieses Bild kann Frieda also nicht erhalten. Die anderen Bilder sind möglich. Bei (**A**) und (**D**) muss Frieda dazu erst den dunkelgrauen Halbkreis und dann den hellgrauen Viertelkreis aufkleben. Bei (**B**) ist die Reihenfolge genau anders herum. Bei (**C**) ist die Reihenfolge egal, in der Frieda die beiden Teile aufklebt.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 7 zu lösen. —

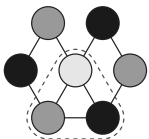
10. Ungarn

Bela möchte die Kreise in der Figur rechts farbig ausmalen. Dabei sollen direkt miteinander verbundene Kreise verschiedene Farben haben. Wie viele Farben braucht Bela dafür <u>mindestens</u>?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

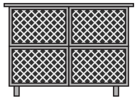
Lösung: In dem Dreieck unten ist jeder der 3 Kreise mit jedem anderen direkt verbunden. Für diese 3 Kreise sind somit 3 Farben nötig. Und wie das Bild zeigt, reichen diese 3 Farben auch, um den Rest der Figur wie gewünscht auszumalen.



Wer findet eine andere Figur für Aufgabe 10,
bei der 3 Farben für die Kreise <u>nicht</u> ausreichen?

11. Mein Opa hat einen neuen Kaninchenstall mit 4 Boxen gebaut. In den linken Boxen sind insgesamt 7 Kaninchen, in den rechten Boxen sind insgesamt 5 und in den oberen Boxen sind insgesamt 8. Wie viele Kaninchen sind insgesamt in den unteren Boxen?

Griechenland



(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 9 (**E**) 11

Lösung: In den linken Boxen sind zusammen 7 Kaninchen und den rechten Boxen sind zusammen 5 Kaninchen. Es sind also insgesamt $7 + 5 = 12$ Kaninchen. Von diesen sind 8 Kaninchen in den oberen Boxen und demzufolge die restlichen $12 - 8 = 4$ Kaninchen in den unteren.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 10 zu lösen. —

12. Mit einer Autofähre werden 35 Personen und ihre 9 Autos transportiert. Zu jedem Auto gehören entweder 3 oder 4 Personen. Wie viele Autos mit 4 Personen sind es?

Norwegen

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

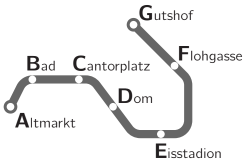
Lösung: Zu jedem Auto gehören mindestens 3 Personen. Das sind schon $9 \cdot 3 = 27$ Personen. Die restlichen $35 - 27 = 8$ Personen gehören zu den Autos mit 4 Personen. Also sind es 8 Autos mit 4 Personen.

Wir hätten auch überlegen können, dass es $9 \cdot 4 = 36$ Personen wären, wenn zu jedem Auto 4 Personen gehören würden. Das wäre eine Person zu viel, also sind es nur 8 Autos mit 4 Personen.

— Die Aufgabe 8 in Klassenstufe 5/6 war ähnlich zu dieser Aufgabe. —

13. Inga ist U-Bahn-Fahrerin auf der U-Bahn-Linie U23. Sie pendelt zwischen Altmarkt und Gutshof hin und her. Inga startet am Cantorplatz. Ihr 1. Halt ist am Dom. Am 65. Halt macht Inga Pause. Wo ist das?

Griechenland



(**A**) Altmarkt (**B**) Bad (**C**) Eisstadion
(**D**) Flohgasse (**E**) Gutshof

Lösung: Inga startet am Cantorplatz, und ihr 1. Halt ist am Dom. Dann ist ihr 2. Halt am Eisstadion, ihr 3. Halt an der Flohgasse und ihr 4. Halt die Endhaltestelle Gutshof. Nun liegen noch $65 - 4 = 61$ Halte vor ihr bis zur Pause. Die beiden Endhaltestellen sind genau 6 Halte voneinander entfernt. Nach 6 weiteren Halten ist Inga also am Altmarkt. Und 12 Halte nach dem Gutshof ist sie wieder am Gutshof. Dann ist sie auch nach 24, 36, 48 und 60 Halten wieder am Gutshof. Einen Halt später macht sie Pause. Das ist an der Flohgasse.

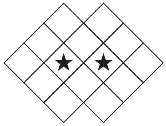
14. Für das Schulfest haben Bruno und Ludwig jeder 9 Luftballons aufgeblasen. Insgesamt sind es 10 rote und 8 blaue Luftballons. Bruno hat doppelt so viele rote Luftballons aufgeblasen wie blaue. Wie viele rote Luftballons hat Ludwig aufgeblasen?

Brasilien

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

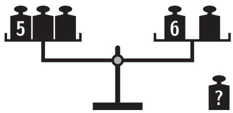
Lösung: Wir überlegen zuerst, wie viele rote und blaue Luftballons Bruno aufgeblasen hat. Er hat doppelt so viele rote wie blaue aufgeblasen. Die Anzahl der Luftballons, die Bruno insgesamt aufgeblasen hat, ist dann 3-mal so gross wie die Anzahl der blauen Luftballons, die er aufgeblasen hat. Da Bruno 9 Luftballons aufgeblasen hat, sind davon also $9 : 3 = 3$ blau und $2 \cdot 3 = 6$ rot. Dann hat Ludwig die restlichen roten Luftballons aufgeblasen, und das sind $10 - 6 = 4$.

Wie viele Quadrate, die genau einen Stern enthalten, sind in der rechts abgebildeten Figur zu finden?



15. Linus spielt mit einer alten Balkenwaage wie im Bild. Er hat 6 Gewichte. Diese wiegen 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg und 6 kg. Er stellt 5 der Gewichte wie abgebildet auf die Waage. Die Waage ist nun im Gleichgewicht. Welches Gewicht hat Linus <u>nicht</u> auf die Waage gestellt?

Russland



(**A**) 1 kg (**B**) 2 kg (**C**) 3 kg (**D**) 4 kg (**E**) Es gibt mehrere Möglichkeiten.

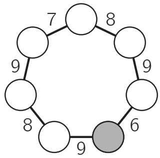
Lösung: Diese Aufgabe kann auf viele verschiedene Weisen gelöst werden. Wir stellen zwei mögliche Lösungswege vor.

Wir überlegen zuerst, welches Gewicht neben dem 6-kg-Gewicht stehen kann.
Angenommen, neben dem 6-kg-Gewicht steht das 1-kg-Gewicht. Dann stehen auf der rechten Seite der Waage insgesamt 7 kg. Da die Waage im Gleichgewicht ist, wiegen die beiden Gewichte neben dem 5-kg-Gewicht zusammen 2 kg, aber das ist mit den noch vorhandenen Gewichten (2 kg, 3 kg, 4 kg) nicht möglich.
Angenommen, neben dem 6-kg-Gewicht steht das 2-kg-Gewicht. Dann stehen rechts insgesamt 8 kg. Da die Waage im Gleichgewicht ist, wiegen die beiden Gewichte neben dem 5-kg-Gewicht zusammen 3 kg, aber das ist mit den noch vorhandenen Gewichten (1 kg, 3 kg, 4 kg) nicht möglich.
Angenommen, neben dem 6-kg-Gewicht steht das 3-kg-Gewicht. Dann stehen rechts insgesamt 9 kg. Da die Waage im Gleichgewicht ist, wiegen die beiden Gewichte neben dem 5-kg-Gewicht zusammen 4 kg, aber das ist mit den noch vorhandenen Gewichten (1 kg, 2 kg, 4 kg) nicht möglich.
Nun bleibt nur noch eine Möglichkeit: Neben dem 6-kg-Gewicht steht das 4-kg-Gewicht. Dann stehen auf der rechten Seite insgesamt 10 kg, und die beiden Gewichte neben dem 5-kg-Gewicht wiegen zusammen 5 kg. Das kann mit den noch vorhandenen Gewichten (1 kg, 2 kg, 3 kg) auf genau eine Weise zusammengestellt werden: 2 kg und 3 kg. Das 1-kg-Gewicht steht nicht auf der Waage.

Eine andere Lösungsmöglichkeit ist folgende: Das 6-kg-Gewicht auf der rechten Seite der Waage ist um 1 kg schwerer als das 5-kg-Gewicht auf der linken Seite der Waage. Daher kann auf der linken Seite der Waage nicht das 1-kg-Gewicht stehen, denn sonst müssten die beiden anderen unbekannten Gewichte auf der Waage gleich schwer sein. Das 1-kg-Gewicht kann aber auch nicht auf der rechten Seite der Waage stehen, da die beiden unbekannten Gewichte auf der linken Seite sonst zusammen 2 kg schwer wären, was nicht möglich ist. Also hat Linus das 1-kg-Gewicht nicht auf die Waage gestellt.

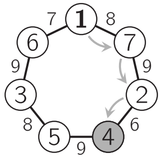
16. Die Zahlen von 1 bis 7 werden in die 7 Kreise eingetragen. Zwischen zwei benachbarten Kreisen steht immer die Summe dieser beiden Zahlen. Welche Zahl wird in den grauen Kreis eingetragen?

Griechenland

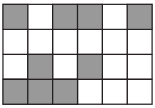


(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Es fällt auf, dass die angegebenen Summen vergleichsweise gross sind, sogar dreimal ist eine 9 dabei. Wir überlegen, wie 9 gebildet werden kann. Es gibt genau drei Möglichkeiten, $9 = 2+7 = 3+6 = 4+5$, und genauso viele sind nötig. Die 1 ist nicht als Summand dabei, sie muss also in den Kreis ganz oben eingetragen werden, das ist der einzige Kreis, der nicht zu einer Summe 9 gehört. Nun füllen wir die Kreise im Uhrzeigersinn der Reihe nach aus, bis wir beim grauen Kreis ankommen: $8-1=7$, $9-7=2$, $6-2=4$. In den grauen Kreis gehört die 4. Das Bild zeigt die vollständig ausgefüllte Figur.



Wie viele Kästchen müssen in der Figur rechts noch ausgemalt werden, damit genau die Hälfte der Kästchen ausgemalt ist?



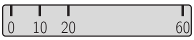
17. Auf einem abgenutzten 60-cm-Lineal sind nur noch wenige Markierungen zu erkennen, aber es kann jede der Längen 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm und 60 cm mit einmaligem Anlegen des Lineals gemessen werden. Welches Lineal könnte das sein?

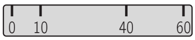
Griechenland

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

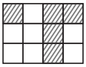
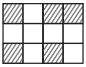
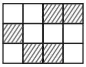
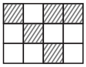
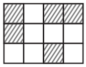
(**E**) 

Lösung: Eine Länge kann genau dann gemessen werden, wenn es auf dem Lineal zwei Markierungen gibt, deren Abstand genau dieser Länge entspricht. Wir prüfen für die fünf Lineale in den Antworten, ob das für jede der Längen 10 cm, 20 cm, 30 cm, 40 cm, 50 cm, 60 cm erfüllt ist oder nicht:
Bei (**A**) und (**C**) können 10 cm, 20 cm, 30 cm, 50 cm und 60 cm gemessen werden, aber 40 cm nicht.
Bei (**B**) können 20 cm, 40 cm und 60 cm gemessen werden, aber 10 cm, 30 cm und 50 cm nicht.
Bei (**D**) können 10 cm, 20 cm, 40 cm, 50 cm und 60 cm gemessen werden, aber 30 cm nicht.
Nur bei (**E**) können die sechs Längen gemessen werden: 10 cm = 10 cm − 0 cm, 20 cm = 60 cm − 40 cm, 30 cm = 40 cm − 10 cm, 40 cm = 40 cm − 0 cm, 50 cm = 60 cm − 10 cm, 60 cm = 60 cm − 0 cm.
Das Lineal bei (**E**) ist das gesuchte Lineal.

— Ein ähnliches, aber viel schwierigeres Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 29 gestellt. —

18. Spanien

Clara hat in einem 3×4-Rechteck 5 Kästchen schraffiert. Ihr Bruder Simon schaut kurz hin und versucht nun, es nachzumalen. Er zeigt Clara die folgenden Versuche. Bei einem Versuch hat Simon die richtigen 5 Kästchen schraffiert. Bei den anderen sind von den schraffierten Kästchen nur 4 richtig und jeweils ein Kästchen ist falsch. Welcher Versuch zeigt Claras Rechteck?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir können für jede Antwort prüfen, ob dies die Lösung ist, indem wir immer für die anderen vier Rechtecke abgleichen, ob dort genau 4 der schraffierten Kästchen ebenfalls schraffiert sind oder nicht. So finden wir die Lösung (**E**).

4	0	5	5
2	1	1	0
1	1	5	0

Ohne die einzelnen Antworten miteinander zu vergleichen, können wir die Aufgabe wie folgt lösen: Von den insgesamt $5 \cdot 5 = 25$ schraffierten Kästchen in den fünf Antworten sind $5 + 4 \cdot 4 = 21$ richtig und $25 - 21 = 4$ sind falsch. Wir zählen für jedes Kästchen, wie oft Simon dieses in seinen fünf Versuchen schraffiert hat (siehe Bild rechts). Kästchen, die in jedem Versuch schraffiert wurden, also insbesondere in dem Versuch, bei dem alles richtig ist, sind ganz sicher richtig. Das trifft auf 3 Kästchen zu, die insgesamt $3 \cdot 5 = 15$ der richtig schraffierten 21 Kästchen ausmachen. Die beiden anderen richtigen Kästchen hat Simon insgesamt $21 - 15 = 6$-mal schraffiert. Aus dem Bild ist nun klar, dass es die beiden linken oberen Kästchen sein müssen, die er 4-mal bzw. 2-mal schraffiert hat. Richtig schraffiert sind folglich alle Kästchen im Versuch (**E**).

Rechenrätsel

In jedes leere Kästchen soll eine Ziffer geschrieben werden, sodass überall korrekte Gleichungen entstehen. Dabei darf bei den einzelnen Gleichungen jeweils <u>keine Ziffer mehrfach</u> verwendet werden. Für jede Aufgabe gibt es genau eine Lösung.

Hier ist ein Beispiel: $\boxed{1}\boxed{3} + \boxed{} = \boxed{}\boxed{} \longrightarrow \boxed{1}\boxed{3} + \boxed{7} = \boxed{2}\boxed{0}$

Der zweite Summand muss größer als 6 sein, da ansonsten bei der Summe an der Zehnerstelle eine 1 stünde und somit mehrfach vorkommen würde. Nun können wir die 7, 8 und 9 probieren. Die 7 ist möglich, da bei $13 + 7 = 20$ keine Ziffer mehrfach vorkommt – das ist also die Lösung. Mit der 8 käme in der Gleichung $13+8 = 21$ die 1 mehrfach vor und bei der 9 käme bei der Gleichung $13+9 = 22$ die 2 mehrfach vor.

Wer findet die fehlenden Ziffern?

Summen

$$\boxed{8}\boxed{} + \boxed{3} = \boxed{}\boxed{}$$

$$\boxed{4}\boxed{} + \boxed{}\boxed{1} = \boxed{8}\boxed{}$$

$$\boxed{}\boxed{5} + \boxed{8}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}$$

Differenzen

$$\boxed{}\boxed{} - \boxed{} = \boxed{4}\boxed{6}$$

$$\boxed{3}\boxed{} - \boxed{}\boxed{5} = \boxed{1}\boxed{}$$

Produkte

$$\boxed{}\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}\boxed{1}$$

$$\boxed{}\boxed{6}\boxed{} \cdot \boxed{5} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

$$\boxed{6}\boxed{} \cdot \boxed{}\boxed{} = \boxed{}\boxed{}\boxed{2}$$

Quotienten

$$\boxed{}\boxed{} : \boxed{8} = \boxed{}\boxed{}$$

$$\boxed{}\boxed{7}\boxed{} : \boxed{5} = \boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Gemischte Aufgaben

$$\boxed{}\boxed{2} + \boxed{} = \boxed{4}\boxed{} - \boxed{5}$$

$$\boxed{2} + \boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{}$$

$$\boxed{2} + \boxed{1} = \boxed{} : \boxed{}$$

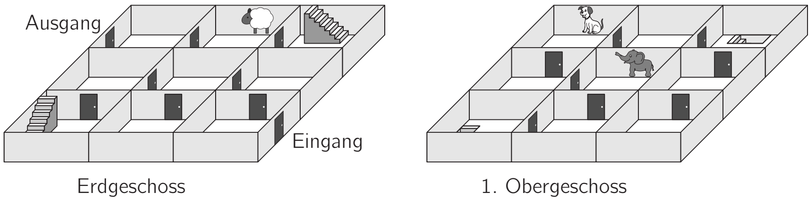
$$\boxed{9} - \boxed{} = \boxed{} : \boxed{3}$$

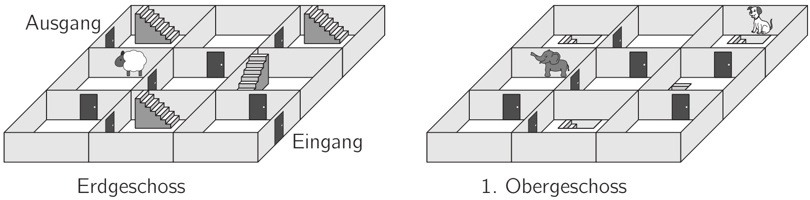
$$\boxed{1} \cdot \boxed{4} = \boxed{} : \boxed{}$$

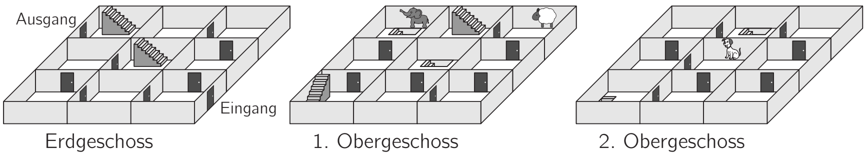
Lauter Labyrinthe

Tina läuft durch drei Gebäude. Sie geht jeweils durch den Eingang hinein und durch den Ausgang wieder hinaus. Die Gebäude haben zwei oder drei Stockwerke. Die Gebäudepläne sind abgebildet.

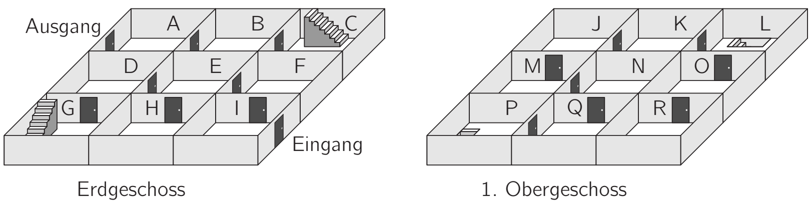
In welcher Reihenfolge findet Tina jeweils die Tiere an den Wänden?
Wenn Tina keinen Raum doppelt betritt, durch wie viele Türen muss sie dann jeweils gehen?
Und wie oft wechselt Tina jeweils das Stockwerk?







Nun läuft Tinas Bruder Marc durch das erste Gebäude. Tina erklärt ihm, wo sich der Eingang und der Ausgang befinden, und dass es auf jeder Etage neun gleich große quadratische Räume sind. Welche Räume durch Türen oder Treppen miteinander verbunden sind, sagt sie ihm aber nicht.
Wenn Marc durch das Gebäude läuft, wird ihm irgendwann klar sein, wie der gesamte Weg vom Eingang bis zum Ausgang verläuft. In welchem Raum ist das frühestens der Fall?



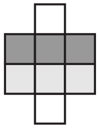
Schieben und Hüpfen

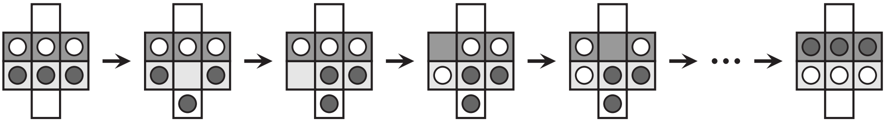
Schnapp dir für dieses Spiel Spielfiguren aus einem Brettspiel, kleine Steine oder Münzen. Du brauchst zwei unterschiedliche Sorten. Zeichne zuerst das entsprechende Spielfeld auf einem Blatt Papier nach. Stell dann die Spielfiguren auf alle markierten Feder, und zwar auf gleichfarbige Felder auch die gleichen Spielfiguren. Ziel ist es, die Spielfiguren zu tauschen. Die Figuren von den dunklen Feldern sollen am Ende auf den hellen Feldern stehen und die Figuren von den hellen Feldern auf den dunklen Feldern. Da heißt es, gut nachdenken und den Überblick behalten. Wer den Faden verliert, beginnt am besten nochmal von vorn.

Level 1: Schieben
Schieb in einem Zug immer eine Spielfigur auf ein freies Nachbarfeld. Nur waagerecht und senkrecht schieben ist erlaubt, über Eck (also diagonal) ist verboten.

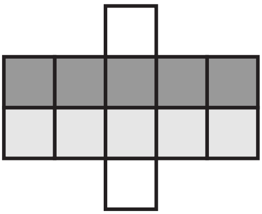
Level 2: Schieben und Hüpfen
Die Regeln sind dieselben wie bei *Level 1*, nur dass du in einem Zug statt zu schieben auch eine Spielfigur über eine benachbarte Spielfigur auf das freie Feld dahinter hüpfen lassen darfst.

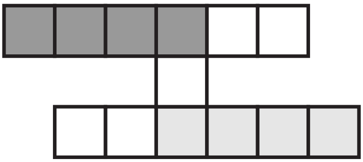
Hier ist ein Beispiel für das rechts abgebildete Spielfeld: Zu Beginn werden auf die dunklen Felder helle Spielfiguren und auf die hellen Felder dunkle Spielfiguren gestellt. Nun wird in jedem Zug eine Spielfigur auf ein freies Nachbarfeld geschoben. Das Ziel ist erreicht, wenn die hellen Spielfiguren auf den hellen Feldern und die dunklen Spielfiguren auf den dunklen Feldern stehen.

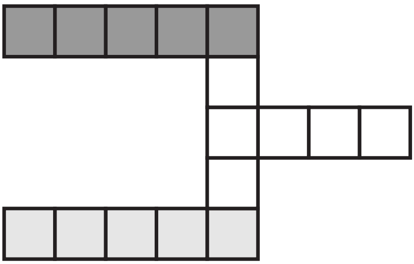


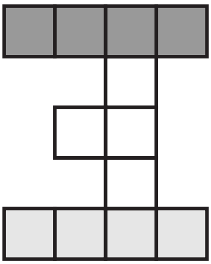


Finde auf den folgenden Spielfeldern eine richtige Zugreihenfolge in den beiden Levels. Wie viele Züge hast du benötigt? Versuch es nochmal, vielleicht schaffst du es auch mit weniger Zügen?



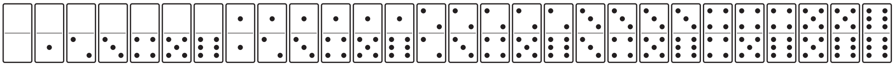




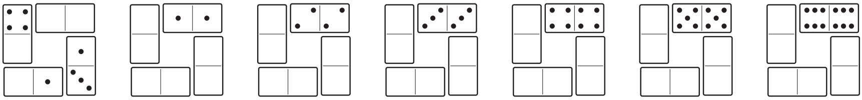


Dominos

Ein Dominospiel besteht aus rechteckigen Spielsteinen, deren Hälften jeweils 6, 5, 4, 3, 2, 1 bzw. keine Augen tragen. Es gibt 28 Spielsteine mit allen möglichen Kombinationen der Augenzahlen. Mit den kleinen gepunkteten Steinen gibt es mannigfaltige Knobeleien. Einige Kostproben folgen. Wer kein Dominospiel zu Hause hat, kann sich die Spielsteine leicht aus Pappe basteln.

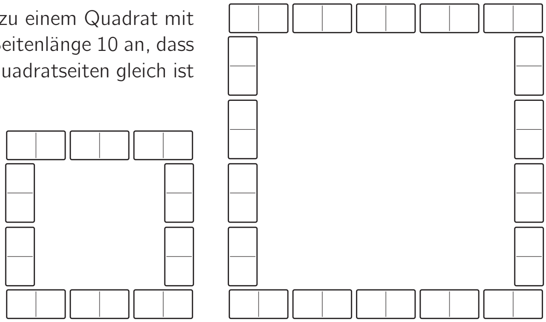


Ordne alle 28 Dominosteine so zu sieben kleinen Quadraten an, dass bei jedem Quadrat die Summe der Augen auf allen vier Quadratseiten gleich ist.



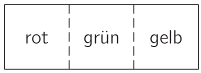
Ordne alle 28 Dominosteine so zu einem Quadrat mit Seitenlänge 6 und einem Quadrat mit Seitenlänge 10 an, dass die Summe der Augen auf allen acht Quadratseiten gleich ist (z.B. gleich 22 oder 24).

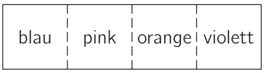
Für die Summe der Augen auf allen acht Quadratseiten kommen nur wenige Zahlen in Frage. Welche sind möglich?



Falterei

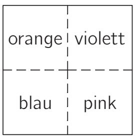
René hat einen Streifen Papier in drei gleich lange Teile geteilt und die Teile auf der Vorder- und auf der Rückseite rot, grün und gelb ausgemalt. Nun faltet er das Papier zweimal, jeweils entlang einer gestrichelten Linie. In welcher Reihenfolge können die Farben übereinanderliegen und wie viele verschiedene Reihenfolgen sind das?

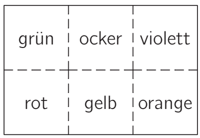




Renés Schwester Katja hat einen etwas längeren Streifen Papier. Sie hat ihn in vier gleich lange Teile geteilt und die Teile blau, pink, orange und violett ausgemalt. Sie faltet dreimal, jeweils entlang einer gestrichelten Linie. In welcher Reihenfolge können die Farben bei Katja übereinanderliegen und wie viele verschiedene Reihenfolgen sind das?

Nun falten René und Katja die beiden rechts abgebildeten Papierstücke. Das kleine wird zweimal und das große dreimal, jeweils entlang einer gestrichelten Linie, gefaltet. In welcher Reihenfolge können die Farben diesmal übereinanderliegen und wie viele verschiedene Reihenfolgen sind das jeweils?





Klassenstufen 5 und 6

1. Welche Rechnung hat das kleinste Ergebnis?

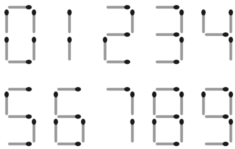
Kroatien

(**A**) $20 : (2+3)$ (**B**) $2 \cdot (0+2) \cdot 3$ (**C**) $(20-2) : 3$ (**D**) $(2+0) \cdot 2 \cdot 3$ (**E**) $(2+0+2) \cdot 3$

Lösung: Wir rechnen: $20 : (2+3) = 4$; $2 \cdot (0+2) \cdot 3 = 12$; $(20-2) : 3 = 6$; $(2+0) \cdot 2 \cdot 3 = 12$; $(2+0+2) \cdot 3 = 12$. Das kleinste Ergebnis ist 4, also ist (**A**) die Lösung.

2. Aus Streichhölzern lassen sich wie im Bild die zehn Ziffern legen. Mit 7 Streichhölzern lässt sich so zum Beispiel die Zahl 15 legen, oder auch eine 8. Welches ist die <u>größte</u> Zahl, die mit 7 Streichhölzern gelegt werden kann?

Österreich



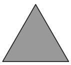
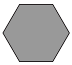
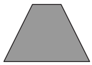
(**A**) 51 (**B**) 74 (**C**) 331 (**D**) 711 (**E**) 840

Lösung: Die grösste angebotene Zahl ist 840. Bereits die 8 besteht aus 7 Streichhölzern. Dann kann 840 nicht die Lösung sein.
Wer es nach dieser Erkenntnis mit 711 versucht, ist bereits am Ziel. 711 kann mit $3+2+2=7$ Streichhölzern gelegt werden und ist unter den verbleibenden Antworten die größte.

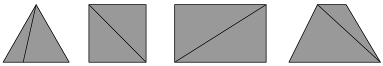
— Eine Aufgabe mit Streichholzziffern gab es als Aufgabe 11 auch in Klassenstufe 7/8. —

3. Welche der fünf Figuren lässt sich <u>nicht</u> mit einer geraden Linie in zwei Dreiecke zerteilen?

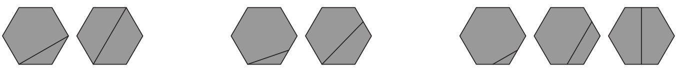
Georgien

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Für das Dreieck und die drei Vierecke sind im Bild mögliche Linien gezeichnet, mit denen die Teilung in zwei Dreiecke erfolgt. Also muss das Sechseck bei (**C**) nach den Wettbewerbsregeln die gesuchte Figur sein.



Beim Sechseck können beim Zerteilen mit einer geraden Linie nie zwei Dreiecke entstehen. Welche zwei Figuren entstehen können, zeigen die folgenden Bilder:

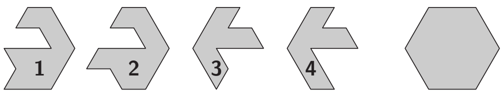


durch zwei Ecken durch eine Ecke durch keine Ecke

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 3 zu lösen. —

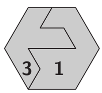
4. Rosalinde hat vier Puzzleteile. Aus welchen beiden Teilen lässt sich das Sechseck legen?

Dänemark



(**A**) 1 und 2 (**B**) 1 und 3 (**C**) 2 und 3 (**D**) 2 und 4 (**E**) 1 und 4

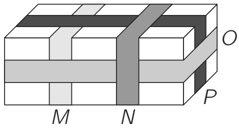
Lösung: Das Sechseck lässt sich aus den Teilen 1 und 3 legen.
Bei allen anderen Kombinationen überlappen sich die Teile oder es bleiben Lücken.



— In Klassenstufe 3/4 war in Aufgabe 3 ein ähnliches Problem zu lösen. —

5. Im Bild ist ein Paket zu sehen. Um das Paket sind vier Bänder M, N, O und P geklebt. In welcher Reihenfolge wurden die Bänder geklebt?

Spanien

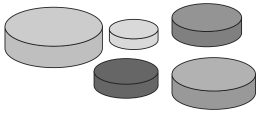


(**A**) M, P, O, N (**B**) O, M, P, N (**C**) N, P, M, O
(**D**) M, O, N, P (**E**) P, N, M, O

Lösung: Oben auf dem Paket ist zu sehen, dass die Bänder M, P, N in dieser Reihenfolge geklebt wurden. Vorn auf dem Paket ist zu sehen, dass O nach M und vor N geklebt wurde. Und rechts ist zu sehen, dass O nach P geklebt wurde. Die Reihenfolge ist M, P, O, N.

6. Knut spielt mit fünf verschieden großen kreisrunden Scheiben. Er will aus vier Scheiben einen Turm bauen. Die vier Scheiben sollen von unten nach oben immer kleiner werden.
Wie viele verschiedene Türme kann Knut bauen?

Slowenien

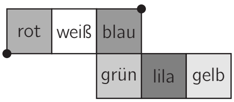


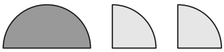
(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 9 (**D**) 12 (**E**) 20

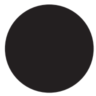
Lösung: Es gibt fünf Möglichkeiten, von den fünf Scheiben eine wegzunehmen. Mit den jeweils verbleibenden vier Scheiben kann Knut genau einen Turm mit der gewünschten Eigenschaft bauen. Er kann also fünf verschiedene Türme bauen.

— *Ähnlich waren Aufgabe 8 in Klassenstufe 3/4 und Aufgabe 14 in Klassenstufe 7/8.* —

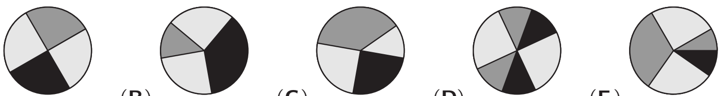
Die dick markierten Punkte in dem abgebildeten Würfelnetz gehören zur selben Seitenfläche des Würfels. Welche Farbe hat diese Seitenfläche?



7. Edgar klebt die drei Papierteile  auf die schwarze Kreisscheibe.
Wie kann die beklebte Kreisscheibe <ins>nicht</ins> aussehen?



Deutschland



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

Lösung: Das dunkelgraue Papierteil ist ein Halbkreis. Dieser kann zwar teilweise oder ganz von den Viertelkreisen bedeckt werden, jedoch kann die beklebte Kreisscheibe nicht wie bei (**E**) aussehen, denn die dunkelgraue Fläche, die teilweise von den beiden Viertelkreisen bedeckt wird, wäre größer als ein Halbkreis.

— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 12 zu lösen.* —

8. Im Februar waren die 23 Kinder aus unserer Klasse auf Klassenfahrt in einer Jugendherberge. Wir waren in sieben Zimmern untergebracht, und zwar zu dritt oder zu viert. In wie vielen Zimmern waren vier Kinder untergebracht?

Norwegen

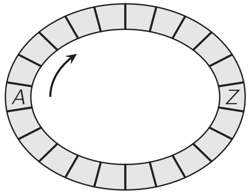
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Wären alle Zimmer Dreibettzimmer gewesen, hätten nur $3 \cdot 7 = 21$ Kinder Platz gehabt. Damit alle 23 Kinder untergebracht werden konnten, musste es also 2 Vierbettzimmer geben.

— *Die Aufgabe 15 in Klassenstufe 3/4 war ähnlich zu dieser Aufgabe.* —

9. Schweiz

Hase, Biber und Känguru wollen auf der abgebildeten Ringbahn springen. Sie beginnen gleichzeitig im Feld A und springen in Pfeilrichtung. Der Biber springt in jedes Feld, der Hase in jedes 3. Feld und das Känguru in jedes 5. Feld, bis sie im Feld Z landen. Wer braucht dazu die kleinste Anzahl von Sprüngen?

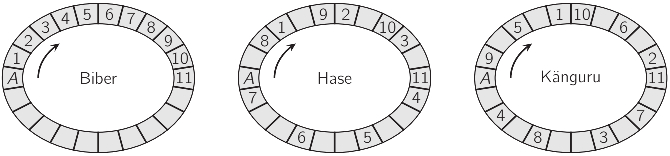


(**A**) das Känguru (**B**) der Biber

(**C**) das Känguru und der Biber (**D**) der Hase

(**E**) Alle drei brauchen gleich viele Sprünge.

Lösung: Wie in der Abbildung können wir für jedes Tier zählen, wie viele Sprünge es braucht, um im Feld Z zu landen. Wir stellen fest, dass alle drei gleich viele Sprünge brauchen, und zwar 11.



Nun geben wir noch einen zweiten Lösungsweg an, bei dem man besser versteht, warum die drei Tiere gleich viele Sprünge brauchen: Wir zählen dazu, beginnend beim Feld, das auf A folgt, die Felder der Ringbahn. Es sind 22. Das Feld Z ist das 11. Feld.

Der Biber ist also mit seinem 11. Sprung auf dem Feld Z gelandet.

Nun können wir uns vorstellen, die Felder der Ringbahn fortlaufend zu nummerieren, sodass das Feld mit der Nummer 1 dann außerdem nach einer Runde mit 22 Feldern die Nummer $1 + 22 = 23$ und nach der 2. Runde die Nummer $1 + 2 \cdot 22 = 45$ usw. erhält. Das Feld mit der 2 erhält nach der 1. Runde die Nummer $2 + 22 = 24$, nach der 2. Runde die Nummer $2 + 2 \cdot 22 = 46$ usw. Das Feld Z hat außer der Nummer 11 die Nummern $11 + 22 = 33$, $11 + 2 \cdot 22 = 55$, $11 + 3 \cdot 22 = 77$ usw.

Der Hase springt nur auf solche Felder, die mit einer durch 3 teilbaren Zahl nummeriert sind, das Känguru nur auf solche Felder, die mit einer durch 5 teilbaren Zahl nummeriert sind.

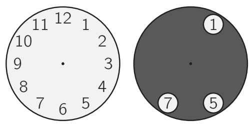
Der Hase erreicht das Feld Z das erste Mal mit der Nummer 33, da die 33 von den Nummern des Felds Z die kleinste durch 3 teilbare Zahl ist. Die Nummer 33 erreicht er mit seinem 11. Sprung.

Das Känguru erreicht das Feld Z das erste Mal mit der Nummer 55, da die 55 von den Nummern des Felds Z die kleinste durch 5 teilbare Zahl ist. Die Nummer 55 erreicht es mit seinem 11. Sprung.

Alle drei Tiere erreichen das Feld Z mit ihrem 11. Sprung.

10. Dänemark

Die dunkle Kreisscheibe mit den drei Löchern passt genau auf das Ziffernblatt. Nun wird die dunkle Scheibe um den Mittelpunkt gedreht. Welche drei Zahlen können gleichzeitig gesehen werden?



(**A**) 2, 4 und 9 (**B**) 1, 5 und 10 (**C**) 4, 6 und 12

(**D**) 3, 6 und 9 (**E**) 5, 7 und 12

Lösung: Es gibt viele Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen. Wir können zum Beispiel nutzen, dass bestimmte Zahlen auf dem Ziffernblatt einander direkt gegenüber liegen; die 1 der 7 (wie abgebildet), die 2 der 8, die 3 der 9, die 4 der 10, die 5 der 11 und die 6 der 12. Ein solches Paar muss zu den drei Zahlen gehören, die gesehen werden können. Also kommen nur (**C**) und (**D**) als Lösung in Frage. Der Abstand der dritten Zahl zu einer der beiden Zahlen ist 2. Das finden wir nur bei (**C**). Diese Zahlen sehen wir, wenn wir die dunkle Scheibe um eine Stelle gegen den Uhrzeigersinn drehen.

Wir können auch bemerken, dass die drei Zahlen 1, 5 und 7 alle ungerade sind. Damit müssen nach dem Drehen auch wieder drei ungerade oder aber drei gerade Zahlen zu sehen sein – wie bei (**C**). Bei den anderen vier Lösungsvorschlägen sind stets sowohl gerade als auch ungerade Zahlen dabei.

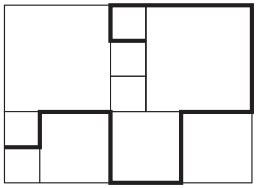
— Ähnlich waren Aufgabe 6 in Klassenstufe 3/4 und Aufgabe 4 in Klassenstufe 7/8. —

11. Nach dem Besuch im Zoo fragen sich Herr Groß und seine vier Söhne, wie viele Kängurus es dort gibt. Jeder der fünf nennt eine andere Zahl: 2, 4, 5, 8, 9. Es zeigt sich, dass eine dieser Zahlen um 4 zu groß und eine andere um 2 zu klein ist.
Wie viele Kängurus gibt es in dem Zoo?

Griechenland

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 8

Lösung: Wenn eine Zahl um 4 zu groß, eine andere um 2 zu klein ist, so ist die Differenz zwischen diesen beiden Zahlen 6. Die Differenz 6 gibt es bei den von Herrn Groß und seinen vier Söhnen genannten fünf Zahlen genau einmal, und zwar zwischen 2 und 8. Die 8 ist um 4 zu groß und die 2 ist um 2 zu klein. So sind also 4 Kängurus im Zoo.



12. Das Rechteck in der Zeichnung ist aus Quadraten in drei verschiedenen Größen zusammengesetzt. Die Seiten der größten Quadrate sind 6 cm lang. Wie lang ist der dick gezeichnete Streckenzug?

Slowakei

(**A**) 38 cm (**B**) 40 cm (**C**) 42 cm (**D**) 44 cm (**E**) 48 cm

Lösung: Der Zeichnung entnehmen wir, dass die Seitenlänge der größten Quadrate genau dreimal so lang ist wie die der kleinsten. Die Seitenlänge der mittelgroßen Quadrate ist doppelt so lang wie die der kleinsten. Die Seitenlängen betragen also 2 cm, 4 cm und 6 cm. Nun zählen wir von einem zum anderen Ende des dick gezeichneten Streckenzugs die jeweiligen Quadratseiten: Es sind 5 kleine, 5 mittelgroße und 2 große. Der Streckenzug ist folglich $5 \cdot 2\,\text{cm} + 5 \cdot 4\,\text{cm} + 2 \cdot 6\,\text{cm} = 42\,\text{cm}$ lang.

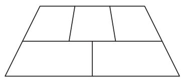
13. Lamia schreibt drei <u>aufeinanderfolgende</u> zweistellige Zahlen der Größe nach auf. Sie beginnt mit der kleinsten Zahl. Anstelle der Ziffern benutzt Lamia Symbole: □◇, ♡△, ♡□. Welche Zahl ist die nächstgrößere?

Deutschland

(**A**) ♡♡ (**B**) □♡ (**C**) ◇□ (**D**) □□ (**E**) ♡◇

Lösung: Bei den beiden ersten aufeinanderfolgenden Zahlen ändern sich von der kleineren zur größeren <u>beide</u> Ziffern. Das passiert genau dann, wenn die Einerziffer der kleineren Zahl eine 9 ist. Damit ergibt sich, dass ◇ eine 9 und △ eine 0 ist. Dann ist □, die Einerziffer der dritten Zahl, eine 1. Dies ist gleichzeitig die Zehnerziffer der kleinsten Zahl. Also muss ♡ eine 2 sein. Die dritte Zahl ist demzufolge 21. Die nächstgrößere, die 22, ist mit Symbolen geschrieben ♡♡.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 13 zu lösen. —



14. Niclas will jede der fünf Flächen im Bild rot, blau oder grün ausmalen. Dabei sollen aneinandergrenzende Flächen verschiedene Farben haben. Auf wie viele verschiedene Weisen kann er das tun?

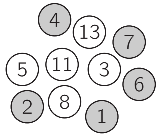
USA

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Wir stellen uns die in der oberen Reihe in der Mitte liegende Fläche rot gemalt vor. Die anderen vier Flächen grenzen alle an dieses Feld. Also muss Niclas von den beiden darunterliegenden Flächen, die ihrerseits aneinandergrenzen, die eine blau, die andere grün ausmalen. Die beiden darüberliegenden Flächen links und rechts müssen ebenfalls blau und grün sein, jedoch in der umgekehrten Reihenfolge. Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, bei der die Fläche in der Mitte der oberen Reihe rot ausgemalt ist, nämlich, wenn er die grünen und die blauen Felder in beiden Reihen jeweils tauscht. Weitere Möglichkeiten mit einem roten Mittelfeld gibt es nicht. Aber mit einem blauen und ebenso mit einem grünen Mittelfeld hat Niclas wieder jeweils 2 Möglichkeiten, wobei er in diesen beiden Fällen – analog zum Vorgehen beim roten Mittelfeld – beim blauen Mittelfeld mit Grün und Rot und beim grünen Mittelfeld mit Rot und Blau kombiniert. Insgesamt hat Niclas $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

15. Sophie hat in die 10 Kreise Zahlen geschrieben. Die Summe der Zahlen in den weißen Kreisen soll gleich der Summe der Zahlen in den grauen Kreisen sein. Dazu muss sie zwei Zahlen miteinander tauschen. Welche?

Griechenland



(**A**) 2 und 8 (**B**) 7 und 13 (**C**) 3 und 7 (**D**) 4 und 13 (**E**) 1 und 11

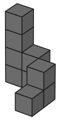
Lösung: Wir gehen die Antwortmöglichkeiten durch. Nur wenn wir wie bei (**E**) die 1 und die 11 tauschen, ist die Summe der Zahlen in den weißen und den grauen Kreisen gleich: $3+5+13+8+1 = 11+7+4+6+2 = 30$.

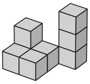
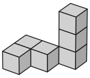
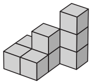
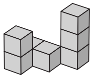
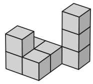
Wir geben noch eine Lösung an, die ohne Durchprobieren auskommt: Die Summe der 5 Zahlen in den weißen Kreisen ist 40, und die Summe der Zahlen in den grauen Kreisen ist 20. Von den beiden zu tauschenden Zahlen muss die in einem weißen Kreis somit um $20 : 2 = 10$ größer sein als die im grauen Kreis. Das trifft nur für 11 und 1 zu.

16. Martha spielt mit hellen und dunklen Holzwürfeln. Entsprechend dem Bauplan hat sie Türme aus dunklen Würfeln aufgebaut. Nun will Martha Türme aus hellen Würfeln ebenso entsprechend dem Bauplan dazustellen. Wie muss sie die hellen Würfel aufbauen?

Iran

4	2	3
2	1	2
1	1	1



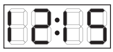
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

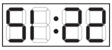
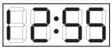
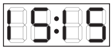
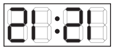
Lösung: Wir färben die Kästchen des Bauplans dunkel, auf die Martha die dunklen Holzwürfel gestellt hat. Dann suchen wir unter den fünf Strukturen aus hellen Würfeln diejenige, die zu den restlichen Feldern des Bauplans passt. Nur bei (**A**) und bei (**C**) passt jeweils die vorderste Reihe zum Bauplan, die anderen Strukturen fallen als Lösungen weg. Die Höhen 2 und 1 in der mittleren Reihe passen nur zu (**A**).

4	2	3
2	1	2
1	1	1

17. Wenn ich im Bad in den Spiegel gucke, sehe ich darin die Uhr, die hinter mir hängt. Was würde ich 30 Minuten später in dem Spiegel sehen?

Iran

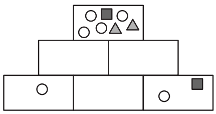


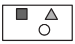
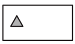
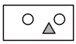
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Das Spiegelbild der Uhr im Bad gehört zur Uhrzeit 21:51. Dann ist es 30 Minuten später 22:21. Und das Spiegelbild dieser Uhrzeit finden wir bei (**A**).

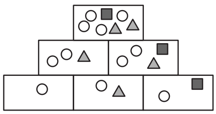
18. Tian zeichnet in alle 6 Boxen rechts kleine Figuren. In jeder Box sollen die Figuren genau so oft auftauchen wie zusammen in den beiden Boxen direkt darunter. Drei Boxen sind schon fertig. Wie muss die Box in der Mitte der unteren Reihe aussehen?

Deutschland



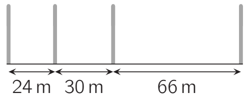
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die in der untersten Reihe außen befindlichen Boxen „liefern“ einen Kreis in die linke Box der mittleren Reihe sowie einen Kreis und ein Quadrat in die rechte Box der mittleren Reihe. Diese drei Figuren tauchen dann in der obersten Box auf. Die weiteren in der obersten Box vorhandenen – zwei Kreise und zwei Dreiecke – müssen ebenfalls aus den beiden Boxen in der mittleren Reihe „geliefert“ werden. Damit das funktioniert, stecken wir ein Dreieck und einen Kreis in die mittlere Box der untersten Reihe. Diese beiden Figuren tauchen dann sowohl in der linken als auch in der rechten Box der mittleren Reihe wieder auf. Das nebenstehende Bild zeigt die fertige „Zahlenmauer“.



19. Für ein Kinderfest soll für Wettbewerbe ein 120 m langer Weg mit Markierstangen in gleich lange Abschnitte geteilt werden. Vier Stangen sind wie im Bild bereits aufgestellt. Wie viele Stangen müssen mindestens dazukommen?

Polen



(**A**) 12 (**B**) 15 (**C**) 17 (**D**) 23 (**E**) 37

Lösung: Da wir nach der kleinstmöglichen Anzahl von Markierstangen suchen, suchen wir nach möglichst großen Abständen zwischen benachbarten Stangen in ganzen Metern. Die Abstände müssen so gewählt sein, dass jeder der drei Abschnitte, die bereits abgeteilt sind, in diese Abstände geteilt werden kann. Die Meterzahl muss also ein Teiler der Längen aller drei Abschnitte und dabei die größtmögliche Zahl sein. Weil $66 = 6 \cdot 11$ ist und 24 sowie 30 nicht durch die Primzahl 11 jedoch durch 6 teilbar sind, ist 6 der grösste gemeinsame Teiler der drei Zahlen 24, 30 und 66. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Markierstangen ist in diesem Fall also 6 m. Für die gesamte Strecke von 120 m sind damit $120 : 6 + 1 = 21$ Stangen nötig. Folglich müssen $21 - 4 = 17$ Stangen noch dazukommen.

20. Die Großmutter ruft ihre Enkel Ida, Ben, Kay und Tina zum Mittagessen. Sie bringen von der Wiese einen Blumenstrauß mit. „Wer hat denn die schönen Blumen gepflückt?“, fragt die Großmutter. Die Kinder kichern, jedes gibt eine Antwort, aber nur eine ist richtig. Ida sagt: „Ben war’s.“ Ben sagt: „Kay war’s.“ Kay sagt: „Ich war’s nicht.“ Tina sagt: „Ich war’s nicht.“ Wer hat die Blumen gepflückt?

Slowakei

(**A**) Ida (**B**) Ben (**C**) Kay (**D**) Tina
(**E**) Das lässt sich nicht sagen.

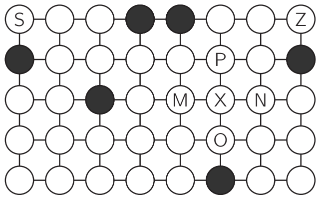
Lösung: Die Antworten von Ben und Kay beziehen sich beide auf Kay. Sie widersprechen sich, und das heißt: Eine dieser beiden Antworten ist wahr, die andere falsch. Da es insgesamt genau eine wahre Antwort gibt, sind die beiden anderen Antworten, nämlich die von Ida und Tina, falsch. Also ist Tinas Antwort „Ich war’s nicht.“ falsch, sie hat geflunkert. Tina hat die Blumen gepflückt.

Trage in jedes Feld eines der Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$ oder $:$ so ein, dass die Gleichung stimmt:

$$9 \;\square\; 8 \;\square\; 7 \;\square\; 6 = 43$$

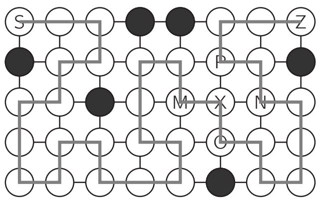
21. Ein kleiner Roboter hat einen Weg vom Start (S) zum Ziel (Z) entlang der weißen Felder gefunden. Jedes weiße Feld musste er genau einmal betreten. Die dunklen Felder hat er nicht betreten. Welches der Felder musste er nach dem mit X markierten Feld als nächstes betreten?

Griechenland



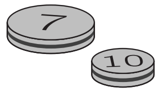
(**A**) M (**B**) N (**C**) O (**D**) P
(**E**) Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Lösung: Wenn wir probieren, den Weg des Roboters nachzugehen, stellen wir fest, dass die Bedingung, dass jedes weiße Feld genau einmal betreten wird, nur auf einem einzigen Weg erfüllt werden kann. Dieser ist hier eingezeichnet.
Nach dem mit X markierten Feld hat der Roboter das Feld mit dem O betreten.



22. Spanien

Kerim hat zwei Plättchen, auf denen jeweils vorn und hinten eine Zahl steht. Auf einem ist vorn eine 7, auf dem anderen ist vorn eine 10. Wenn Kerim beide Plättchen wirft und die oben liegenden Zahlen addiert, erhält er entweder 11, 12, 16 oder 17 – je nachdem, welche Seiten oben liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Zahl, die auf der Rückseite des grossen Plättchens mit der 7 steht?



(**A**) eine (**B**) zwei (**C**) drei (**D**) fünf (**E**) sieben

Lösung: Das Plättchen mit der 7 ist das große, das mit der 10 das kleine Plättchen.
Wenn beim Werfen die Vorderseiten der beiden Plättchen, 7 und 10, oben liegen, entsteht die Summe 17. Die Zahl, die auf der Rückseite des grossen Plättchens steht, hat zusammen mit der 10 entweder die Summe 11, 12 oder 16. Es kommen dafür nur die Zahlen $11 - 10 = 1$, $12 - 10 = 2$ und $16 - 10 = 6$ in Frage. Wir müssen untersuchen, welche dieser Zahlen auch wirklich möglich sind.

Fall 1: Auf der Rückseite des grossen Plättchens steht 1. Dann sind die beiden noch fehlenden Summen 12 und 16. Da 1 kleiner als 7 ist, hat die 1 zusammen mit der Zahl auf der Rückseite des kleinen Plättchens die Summe 12. Folglich steht auf der Rückseite des kleinen Plättchens die $12 - 1 = 11$. Das ist aber nicht möglich, da die vierte Summe dann $7 + 11 = 18$ wäre und nicht 16. Fall 1 entfällt.

Fall 2: Auf der Rückseite des grossen Plättchens steht 2. Dann sind die beiden noch fehlenden Summen 11 und 16. Es folgt, dass auf der Rückseite des kleinen Plättchens die $11-2 = 9$ steht. Da die Summe $7 + 9 = 16$ ist, ist dieser Fall möglich.

Fall 3: Auf der Rückseite des grossen Plättchens steht 6. Dann sind die beiden noch fehlenden Summen 11 und 12. Es folgt, dass auf der Rückseite des kleinen Plättchens die $11-6 = 5$ steht. Da die Summe $7 + 5 = 12$ ist, ist dieser Fall möglich.

Es gibt zwei Möglichkeiten für die Zahl, die auf der Rückseite des grossen Plättchens mit der 7 steht, nämlich die 2 oder die 6.

Was ist die Summe aus der größten 3-stelligen Zahl, die durch 4 teilbar ist, und der kleinsten 4-stelligen Zahl, die durch 3 teilbar ist?

23. Spanien

Kateryna und Sebastian haben eine Schachtel mit Spielsteinen, aus der sie abwechselnd 1, 2, 3, 4 oder 5 Steine entnehmen können. Wer den letzten Stein aus der Schachtel nehmen muss, verliert. Als noch genau 10 Spielsteine in der Schachtel sind, ist Kateryna am Zug. Wie viele Steine muss sie in der Schachtel lassen, damit Sebastian verliert?

(**A**) 9 (**B**) 8 (**C**) 7 (**D**) 6 (**E**) 5

Lösung: Sebastian verliert ganz sicher, wenn Kateryna irgendwann im Spielverlauf genau einen Stein in der Schachtel lässt. Im ersten Zug kann ihr das nicht gelingen, da sie nicht 9 Steine entnehmen darf. Da sie 1, 2, 3, 4 oder 5 Steine entnehmen darf, kann sie dies erreichen, wenn Sebastian beim Zug davor 2, 3, 4, 5 oder 6 Steine in der Schachtel lässt. Und eine dieser Anzahlen an Steinen verbleibt ganz sicher in der Schachtel, wenn Sebastian für seinen Zug genau 7 Steine in der Schachtel vorfindet, da er 1, 2, 3, 4 oder 5 Steine entnehmen muss. Und 7 Steine kann Kateryna im ersten Zug übrig lassen, indem sie 3 Steine herausnimmt.
Zum Schluss begründen wir noch, dass dies wirklich die einzige Möglichkeit für Katerynas ersten Zug ist: Würde sie weniger als 7 Steine übrig lassen, könnte Sebastian einen Stein für Kateryna übrig lassen, die damit im nächsten Zug verliert. Würde sie mehr als 7 Steine übrig lassen, könnte Sebstian 7 Steine für Kateryna übrig lassen, die dann verliert, wenn Sebastian die beschriebene Strategie anwendet.

24. Riekes Eltern haben eine wöchentliche Gemüsekiste abonniert. Jeweils am Mittwoch können sie Wünsche für die Kiste melden. Dazu erfahren sie für diese Woche:

Iran

- 2 Kürbisse sind so viel wert wie 5 Zucchini.
- 3 Zucchini sind so viel wert wie 8 Tomaten.
- 2 Tomaten sind so viel wert wie 3 Radieschen.

Welche der folgenden Zusammenstellungen hat in dieser Woche den höchsten Wert?

(**A**) 2 Kürbisse und 3 Radieschen
(**B**) 3 Zucchini und 5 Radieschen
(**C**) 4 Zucchini und 2 Tomaten
(**D**) 1 Kürbis und 4 Zucchini
(**E**) 6 Tomaten und 7 Radieschen

Lösung: Wir schreiben K für Kürbis, Z für Zucchini, T für Tomate und R für Radieschen. Wenn zwei Gemüsezusammenstellungen gleich viel wert sind, schreiben wir $=$, und wir benutzen $>$, wenn die erste mehr wert ist als die zweite. Die Bewertungen der Sorten für diese Woche zeigen:

Da $2K = 5Z$ und $5Z > 4Z$, ist $1K > 2Z$.
Da $3Z = 8T$ und $8T > 6T$, ist $1Z > 2T$.
Und da $2T = 3R$, ist $1T > 1R$.

Nun wenden wir dies auf die Bewertung der fünf Zusammenstellungen an.
Wir vergleichen (**A**) mit (**B**): $2K+3R > 4Z+3R = 3Z+1Z+3R > 3Z+2T+3R > 3Z+2R+3R = 3Z+5R$, also ist (**A**) mehr wert als (**B**).
Wir vergleichen (**A**) mit (**C**): $2K+3R = 5Z+2T > 4Z+2T$, also ist (**A**) auch mehr wert als (**C**).
Da die Zusammenstellung bei (**E**) vermutlich auch weniger wert sein könnte als die bei (**A**), vergleichen wir als nächstes (**A**) mit (**E**): $2K+3R = 5Z+3R > 5\cdot 2T+3R = 6T+4T+3R > 6T+7R$, also ist (**A**) auch mehr wert als (**E**). Bisher hat (**A**) den höchsten Wert.
Nun vergleichen wir zum Schluss noch (**D**) mit (**A**): $1K+4Z > 2Z+4Z = 5Z+1Z = 2K+1Z > 2K+2T = 2K+3R$, also ist (**D**) mehr wert als (**A**).
(**D**) hat den höchsten Wert, denn (**A**) ist ja mehr wert als die anderen drei Zusammenstellungen.

Lösungsvariante: Wir geben noch einen zweiten Lösungsweg an, der ein bisschen übersichtlicher ist und mit dem wir zugleich eine gute Methode für ähnliche Probleme kennenlernen.
Um den Wert der Zusammenstellungen gut abschätzen zu können, wählen wir eine Gemüsesorte aus und errechnen, welchen Wert sie im Vergleich zu jeder einzelnen der anderen Sorten hat. Wir wählen hier die Radieschen aus, da diese vermutlich den geringsten Wert haben.
Es gilt: 3 Radieschen sind so viel wert wie 2 Tomaten, folglich sind $4\cdot 3 = 12$ Radieschen so viel wert wie $4\cdot 2 = 8$ Tomaten, und diese sind so viel wert wie 3 Zucchini. Daraus finden wir, dass 1 Zucchini so viel wert ist wie $12 : 3 = 4$ Radieschen. Dann sind also 5 Zucchini so viel wert wie $5\cdot 4 = 20$ Radieschen ebenso wie 2 Kürbisse (die ja so viel wert sind wie 5 Zucchini). Folglich ist 1 Kürbis so viel wert wie 10 Radieschen.
Nun gehen wir die fünf angegebenen Auswahlen durch und setzen überall für Kürbisse, Zucchini und Tomaten die entsprechende Anzahl von Radieschen ein:

(**A**) ist so viel wert wie $2\cdot 10+3 = 23$ Radieschen.
(**B**) ist so viel wert wie $3\cdot 4+5 = 17$ Radieschen.
(**C**) ist so viel wert wie $4\cdot 4+3 = 19$ Radieschen.
(**D**) ist so viel wert wie $1\cdot 10+4\cdot 4 = 26$ Radieschen.
(**E**) ist so viel wert wie $3\cdot 3+7 = 16$ Radieschen.

Auswahl (**D**) hat den höchsten Wert.

Hunderoboter

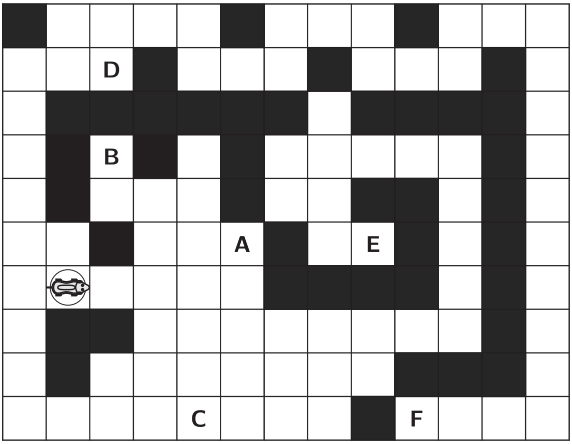
Hunderoboter Robbie wird mit 4 Tasten durch den abgebildeten Parcours gesteuert:

Drückt man die Taste [↑], geht Robbie ein Feld vorwärts.

Drückt man die Taste [↓], geht Robbie ein Feld rückwärts.

Drückt man die Taste [↱], dreht sich Robbie auf der Stelle nach rechts.

Drückt man die Taste [↰], dreht sich Robbie auf der Stelle nach links.



Für jedes der Zielfelder **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** ist eine Tastenabfolge angegeben, mit der Robbie von seiner mit dem Kreis markierten Startposition zum jeweiligen Zielfeld laufen soll. Es hat sich jedoch in jeder Tastenabfolge ein kleiner Fehler eingeschlichen. Es muss jeweils eine Taste durch eine andere Taste ausgetauscht werden, damit Robbie wirklich am richtigen Zielfeld ankommt.
Wer kann alle Tastenabfolgen korrigieren?

A: [↑] [↑] [↑] [↑] [↰] [↓]

B: [↑] [↑] [↱] [↑] [↑] [↰] [↑] [↱] [↑]

C: [↑] [↑] [↑] [↱] [↑] [↱] [↱] [↱] [↰] [↑] [↑]

D: [↓] [↰] [↓] [↓] [↓] [↓] [↓] [↱] [↓] [↓]

Viele Tastenfolgen lassen sich platzsparender aufschreiben, indem nicht jede Taste einzeln aufgeschrieben wird. Vor manche Tasten haben wir eine Zahl und ein × geschrieben. Die Zahl gibt an, wie oft die Aktion der Taste dahinter ausgeführt werden muss. Wenn die Aktionen von mehreren Tasten wiederholt werden sollen, schreiben wir diese Tasten in Klammern und setzen die Zahl und ein × davor. Wieder hat sich in jeder Tastenfolge genau eine falsche Taste eingeschlichen, die durch eine andere ausgetauscht werden muss. Wer findet die falschen Tasten?

E: 4×[↑] [↱] [↑] [↰] 5×[↑] [↰] 4×[↑] [↰] 3×[↑] [↱] [↑] [↑] [↰] [↑]

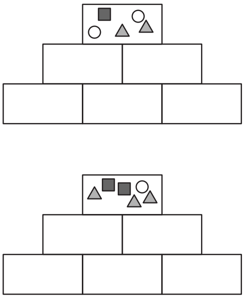
F: [↓] [↰] 5×[↑] [↱] 3×([↑] [↑] [↰] [↑] [↱] [↑] [↑] [↱] [↑] [↰]) [↱] 8×[↑] [↓] 3×[↑]

<u>Zusatz</u>: Kannst du auch platzsparend aufschreiben, dass sich Robbie einmal im Uhrzeigersinn drehen soll? Oder dass sich Robbie erst dreimal im Uhrzeigersinn und dann dreimal gegen den Uhrzeigersinn drehen soll? Oder dass er ein Quadrat mit Seitenlänge 5 ablaufen soll?

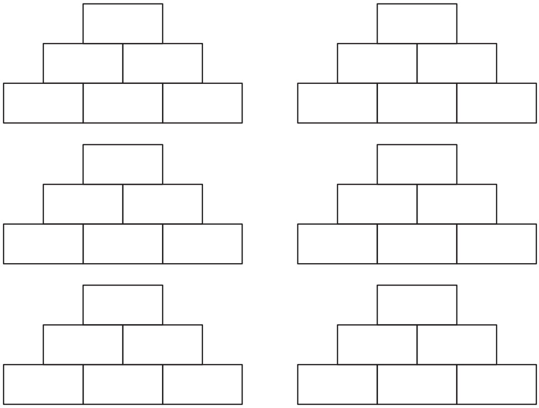
Überall fehlt noch etwas

Bei den Pyramiden sollen in die leeren Kästchen kleine Figuren eingezeichnet werden: Kreise, Dreiecke und Quadrate. Kein Kästchen darf leer bleiben. In jedem Kästchen sollen die Figuren genauso oft auftauchen wie zusammen in den beiden Boxen direkt darunter.

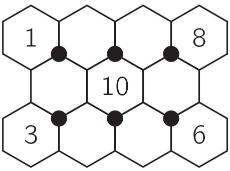
Finde bei beiden Pyramiden je eine Möglichkeit, wie die Figuren in die Kästchen eingezeichnet werden können. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die verschiedenen Figuren auf die Kästchen zu verteilen. Wie viele Möglichkeiten findest du?

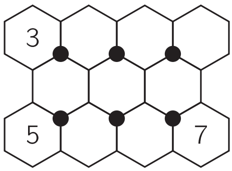


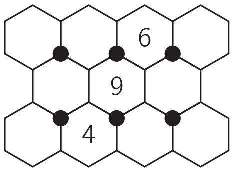
— leere Pyramiden zum Probieren —

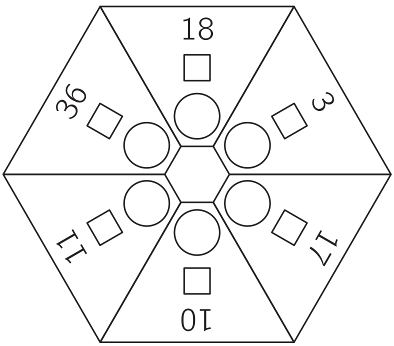


In die Sechsecke sollen die Zahlen von 1 bis 11 geschrieben werden. Dabei soll die Summe der drei Zahlen in den Sechsecken um einen schwarzen Punkt bei allen sechs Punkten die gleiche sein.
Welche Summe ist das jeweils bei den folgenden drei Aufgaben?
Wie sehen die vollständig ausgefüllten Figuren aus?







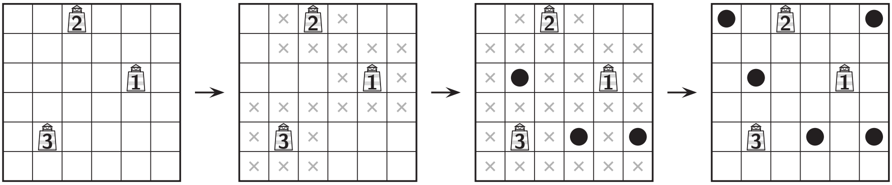


Die sechs Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sollen in die Kreise geschrieben werden und eines der vier Rechenzeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ in jedes quadratische Feld. Bei allen sechs Rechnungen – von außen nach innen gelesen – soll in der Mitte das gleiche Ergebnis entstehen.

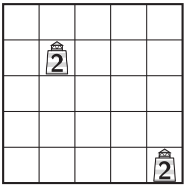
Wie lautet dieses Ergebnis?

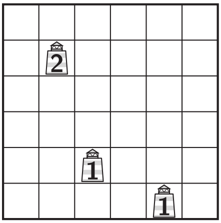
Leuchttürme

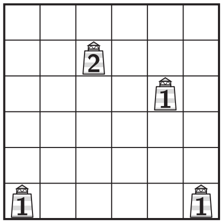
In den folgenden Diagrammen sind Leuchttürme mit Zahlen vorgegeben. In einige leere Felder sollen nun Schiffe eingezeichnet werden (zum Beispiel als dicker Punkt). Dabei darf kein Schiff ein anderes Schiff oder einen Leuchtturm berühren, auch nicht diagonal. Von jedem Leuchtturm aus werden alle Schiffe gesehen, die sich in derselben Zeile oder in derselben Spalte wie dieser Leuchtturm befinden. Die Zahlen geben an, wie viele Schiffe von dem jeweiligen Leuchtturm aus gesehen werden können. Jedes Schiff muss von mindestens einem Leuchtturm aus gesehen werden. Hier ist ein Beispiel:

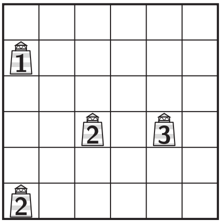


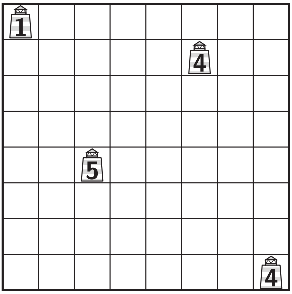
Wer findet die richtigen Positionen der Schiffe?

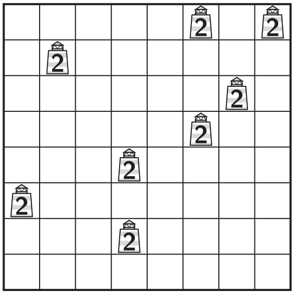


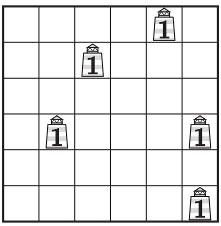


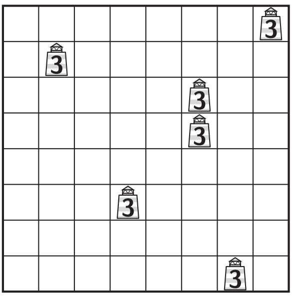


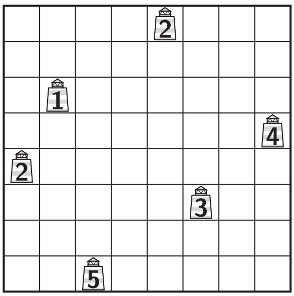












Klassenstufen 7 und 8

1. $2023 : (2 + 0 + 2 + 3) =$

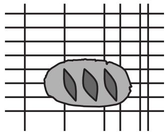
Schweden

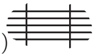
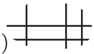
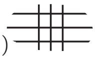
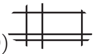
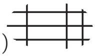
(**A**) 179 (**B**) 198 (**C**) 269 (**D**) 289 (**E**) 301

Lösung: $2023 : (2 + 0 + 2 + 3) = 2023 : 7 = 289$.

2. Ein frisch gebackenes Brot wurde zum Abkühlen auf einen Gitterrost gelegt. Wie sieht der Teil des Gitterrostes unter dem Brot aus?

Kroatien

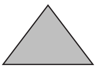
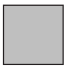
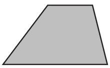
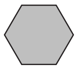


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Unter dem Brot sind 3 waagerechte und 3 senkrechte Gitterstangen. Damit fallen die Antwortmöglichkeiten (**A**) und (**B**) weg. Bei (**C**) und (**D**) haben Gitterstangen andere Abstände als im Gitterrost. Nur bei (**E**) passen alle Abstände, das ist die Lösung.

3. Welche der folgenden Figuren (Dreieck, Quadrat, Trapez, regelmässiges Sechseck, Rechteck) kann <u>nicht</u> mit einer geraden Linie in zwei Trapeze zerteilt werden?

Georgien

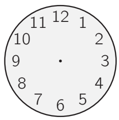
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

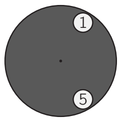
Lösung: Das Dreieck bei (**A**) kann nicht mit einer geraden Linie in zwei Trapeze zerteilt werden, weil beim Zerteilen entweder zwei Dreiecke oder ein Dreieck und ein Viereck entstehen, je nachdem, ob die Linie durch einen Eckpunkt verläuft oder nicht. Die anderen Figuren können zum Beispiel folgendermassen in zwei Trapeze zerteilt werden:

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 3 zu lösen. —

4. Die dunkle Kreisscheibe mit den zwei Löchern passt genau auf das Ziffernblatt. Nun wird die dunkle Scheibe so um den gemeinsamen Mittelpunkt gedreht, dass eine 10 in einem der Löcher zu sehen ist. Welche Zahl ist dann im anderen Loch zu sehen?

Dänemark





(**A**) 2 oder 7 (**B**) 2 oder 6 (**C**) 1 oder 8 (**D**) 3 oder 6 (**E**) 3 oder 7

Lösung: Die 5 ist auf dem Ziffernblatt 4 Zahlen von der 1 entfernt. Die gesuchten Zahlen müssen von der 10 also ebenfalls 4 Zahlen entfernt sein. Eine Möglichkeit ist die 6 wegen $10 - 4 = 6$. In der anderen Richtung ist die 2 auf dem Ziffernblatt 4 Zahlen von der 10 entfernt. Es kann also die 2 oder die 6 im anderen Loch zu sehen sein.

— Ähnlich waren Aufgabe 6 in Klassenstufe 3/4 und Aufgabe 10 in Klassenstufe 5/6. —

5. Marvin wird heute 10 000 Tage alt. Wie alt ist er?

Frankreich

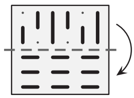
(**A**) zwischen 0 und 3 Jahre (**B**) zwischen 4 und 12 Jahre (**C**) zwischen 13 und 19 Jahre
(**D**) zwischen 20 und 49 Jahre (**E**) zwischen 50 und 99 Jahre

Lösung: Da ein Jahr 365 oder 366 Tage hat und dies ungefähr ein Drittel von 1 000 ist, sind 1 000 Tage ungefähr 3 Jahre und 10 000 Tage folglich ungefähr 30 Jahre. Also ist Marvin zwischen 20 und 49 Jahre alt, wie bei (**D**) angegeben.

Wer schriftlich dividiert, erhält $10\,000 : 365 = 27,\ldots$ Die Überschlagsrechnung, die wir angegeben haben, ist zwar recht grob, reicht aber, um die richtige Antwort zu finden.

6. Kristina hat ein durchsichtiges Stück Folie, auf dem einige Linien eingezeichnet sind. Sie faltet es entlang der gestrichelten Linie nach unten. Was ist nun zu sehen?

Dänemark



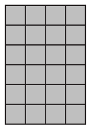
(**A**) 269 (**B**) 286 (**C**) 569 (**D**) 266 (**E**) 589

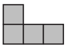
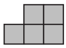
Lösung: Wir markieren in der unteren Hälfte, wo sich dort die Linien aus der oberen Hälfte nach dem Falten befinden. Wir erhalten 569, was bei (**C**) zu sehen ist.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 5 zu lösen. —

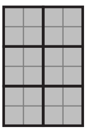
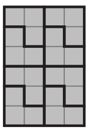
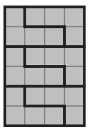
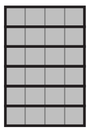
7. Das abgebildete Rechteck soll aus lauter gleichen Figuren gelegt werden. Die Figuren dürfen gedreht werden, und es darf keine Lücken oder Überlappungen geben. Mit welcher der fünf Figuren ist das <u>nicht</u> möglich?

Griechenland



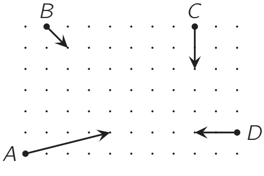
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Das Rechteck enthält $4 \cdot 6 = 24$ Kästchen. Da es keine Lücken oder Überlappungen geben darf, muss die Anzahl der Kästchen in der Figur ein Teiler der Anzahl der Kästchen im Rechteck, also ein Teiler von 24, sein. Da 5 kein Teiler von 24 ist, ist diese Bedingung für die Figur bei (**D**) nicht erfüllt. Mit der Figur bei (**D**) kann das Rechteck also nicht gelegt werden.
Mit jeweils sechs Exemplaren der Figuren bei (**A**), (**C**) und (**E**) bzw. acht Exemplaren der Figur bei (**B**) kann das Rechteck gelegt werden, wie die Bilder zeigen:

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**E**) 

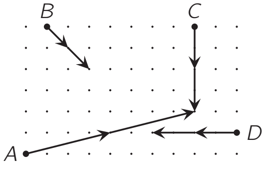
8. Die Abbildung zeigt für 4 Autoscooter mithilfe der Pfeile ihre Ausgangsposition, ihre Fahrtrichtung und wie weit sie sich in 5 Sekunden bewegen. Welche beiden Autos werden zusammenstossen?

Dänemark



(**A**) *A* und *C* (**B**) *C* und *D* (**C**) *A* und *B*
(**D**) *B* und *C* (**E**) *A* und *D*

Lösung: Wir zeichnen ein, wie weit sich die Autoscooter in 5 weiteren Sekunden bewegen. Dann sehen wir, dass Autoscooter *A* und *C* genau 10 Sekunden nach dem Start zusammenstossen.
Wer die Pfeile weiter zeichnet, sieht, dass es keine weiteren Zusammenstösse gibt, weil sich die Pfeile zwar kreuzen, aber nicht noch einmal zwei Autoscooter zur selben Zeit am selben Ort sind.



9. Australien

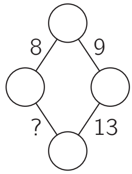
In der Fahrschule „Blitz“ sind aktuell 40 Fahrschüler angemeldet. Von ihnen haben 40 % bereits die theoretische Prüfung bestanden und 60 % noch nicht. Wie viele der Fahrschüler müssen die theoretische Prüfung noch bestehen, damit genau die Hälfte der 40 Fahrschüler bestanden hat?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 9

Lösung: Es müssen noch $60\,\% - 50\,\% = 10\,\%$ der Fahrschüler die Prüfung bestehen, damit genau die Hälfte bestanden hat. Da 10 % von 40 genau 4 sind, müssen noch 4 Fahrschüler bestehen.
Alternativ können wir auch zuerst berechnen, wie viele Fahrschüler bereits bestanden haben. Das sind 40 % von 40 Fahrschülern, also $\frac{40}{100} \cdot 40 = 16$ Fahrschüler. Damit die Hälfte der 40 Fahrschüler, also 20, bestanden hat, müssen noch $20 - 16 = 4$ Fahrschüler die Prüfung bestehen.

10. Griechenland

In jeden Kreis der abgebildeten Figur soll eine Zahl geschrieben werden. Zwischen zwei benachbarten Kreisen steht immer die Summe der Zahlen in diesen beiden Kreisen. Welche Zahl muss an der Stelle des Fragezeichens stehen?

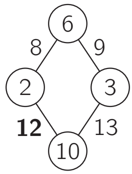


(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 14 (**D**) 15 (**E**) 16

Lösung: Die Summe der vier Zahlen in den Kreisen ist gleich $8 + 13 = 21$, denn jede dieser vier Zahlen ist entweder ein Summand der 8 oder ein Summand der 13, die zwischen den Kreisen stehen. Genauso ist $9+?$ die Summe der vier Zahlen in den Kreisen. Also steht an der Stelle des Fragezeichens $21 - 9 = 12$.

Eine andere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, ist folgende: Da die Summe 8 um 1 kleiner als 9 ist, muss die Zahl im linken Kreis in jedem Fall um 1 kleiner sein als die Zahl im rechten Kreis, denn die Summen 8 und 9 unterscheiden sich um genau diese beiden Summanden. Genauso ist die Zahl an der Stelle des Fragezeichens um 1 kleiner als 13, also gleich 12.

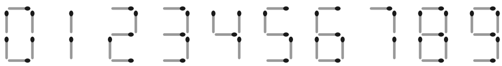
Die Aufgabe kann ausserdem auch gut gelöst werden, indem wir in einen Kreis eine Zahl eintragen und dann die anderen Kreise passend ausfüllen. Eine mögliche Belegung ist rechts abgebildet. Für die Eintragung der Zahlen in die Kreise gibt es zwar mehrere Möglichkeiten, aber an der Stelle des Fragezeichens steht stets eine 12.



— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 14 zu lösen. —

11. Österreich

Mit Streichhölzern lassen sich die Ziffern von 0 bis 9 legen:



Wie viele verschiedene natürliche Zahlen lassen sich mit genau fünf Streichhölzern legen?

(**A**) 2 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 11

Lösung: Wir zählen zuerst, mit wie vielen Streichhölzern die Ziffern jeweils gelegt werden:

Anzahl Streichhölzer	2	3	4	5	6	7
Ziffern	1	7	4	2, 3, 5	0, 6, 9	8

Der Tabelle entnehmen wir, dass die einstelligen Zahlen, die wir mit genau fünf Streichhölzern legen können, die 2, die 3 und die 5 sind. Zweistellige Zahlen mit genau fünf Streichhölzern lassen sich nur legen, wenn wir einmal zwei und einmal drei Streichhölzer nehmen, also wenn die Ziffern 1 und 7 sind. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: 17 und 71. Dreistellige und noch grössere Zahlen sind mit fünf Streichhölzern nicht möglich. Insgesamt können wir also fünf verschiedene natürliche Zahlen mit genau fünf Streichhölzern legen.

— Eine Aufgabe mit Streichholzziffern war auch in Klassenstufe 5/6 als Aufgabe 2 zu lösen. —

12. Mexiko

Evita möchte die Zahlen von 1 bis 8 so in die Kästchen des abgebildeten Gitters schreiben, dass die Summen der Zahlen in den Kästchen in den vier Zeilen gleich sind und die Summen der Zahlen in den Kästchen in den beiden Spalten gleich sind. Sie hat bereits die Zahlen 3, 4 und 8 eingetragen. Welche Zahl muss sie in das graue Kästchen schreiben?

	3
4	
	8

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Die Summe der einzutragenden Zahlen ist $1+2+3+4+5+6+7+8 = (1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5) = 4 \cdot 9 = 36$. In jeder Zeile muss die Summe also $36 : 4 = 9$ betragen und in jeder Spalte $36 : 2 = 18$. Damit können wir zuerst die drei oberen Zeilen und anschliessend die beiden Spalten fertig ausfüllen. Im grauen Kästchen muss die 7 stehen.

6	3
4	5
1	8
7	2

13. Deutschland

Laurenz schreibt drei aufeinanderfolgende dreistellige Zahlen der Grösse nach auf. Er beginnt mit der kleinsten Zahl. Statt der Ziffern verwendet er Symbole: □◊◊, ♡△△, ♡△□. Welche Zahl ist die nächstgrössere?

(**A**) ♡♡◊ (**B**) □♡□ (**C**) ♡△◊ (**D**) ♡◊□ (**E**) ♡△♡

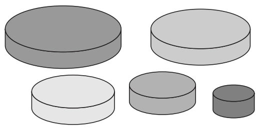
Lösung: Von der ersten zur zweiten Zahl wechselt die Ziffer an der Hunderterstelle. Somit endet die erste Zahl auf 99, die zweite auf 00 und die dritte auf 01. Also gilt ◊ = 9, △ = 0 sowie □ = 1. Die gesuchte nächstgrössere Zahl beginnt mit ♡△ und endet auf 2. Da die erste Zahl mit 1 beginnt, beginnen die folgenden Zahlen mit 2 und das Symbol für die Ziffer 2 ist gefunden: ♡ = 2. Die gesuchte nächstgrössere Zahl ist 202, in Symbolen ♡△♡.

— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 13 zu lösen.* —

Welche Zahl kommt als nächste, wenn □◊◊, ♡△△, ♡△□ drei aufeinanderfolgende dreistellige Zahlen in absteigender Reihenfolge sind?

14. Slowenien

Marlene will aus drei der abgebildeten Scheiben einen Turm bauen. Die Scheiben sollen von unten nach oben immer kleiner werden. Wie viele verschiedene Türme kann Marlene bauen?



(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Egal, welche drei Scheiben Marlene wählt, sie kann aus ihnen immer genau einen Turm bauen, bei dem von unten nach oben immer kleiner werden. Um die Anzahl der möglichen Türme zu finden, bezeichnen wir die Scheiben von gross nach klein mit A, B, C, D und E. Dann können wir alle möglichen Scheibenkombinationen, aus denen ein solcher Turm bestehen kann, systematisch aufschreiben: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE. Marlene kann also 10 verschiedene Türme bauen.

Eine Lösungsvariante besteht darin, die beiden Scheiben zu betrachten, die nicht verwendet werden. Bei der ersten Scheibe, die Marlene nicht verwendet, hat sie 5 Möglichkeiten, diese auszuwählen, und bei der zweiten Scheibe dann noch 4 Möglichkeiten. Bei dieser Überlegung wird jedoch jede Wahl von 2 Scheiben doppelt betrachtet, denn Marlene könnte jede der beiden Scheiben als erste oder als zweite wählen. Also gibt es $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ Möglichkeiten, 2 der 5 Scheiben auszuwählen.

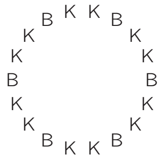
— *Ähnlich waren Aufgabe 8 in Klassenstufe 3/4 und Aufgabe 6 in Klassenstufe 5/6.* —

15. Biber und Kängurus haben sich im Kreis aufgestellt. Es sind insgesamt 18 Tiere. Neben jedem Känguru steht mindestens ein Biber. Was ist die grösstmögliche Anzahl von Kängurus in diesem Kreis?

Puerto Rico

(**A**) 11 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 14 (**E**) 15

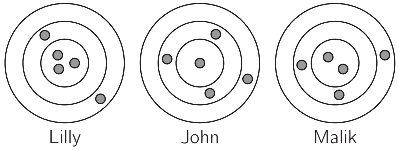
Lösung: Die Kängurus stehen einzeln oder zu zweit nebeneinander im Kreis, da es sonst mindestens ein Känguru gibt, das zwei Kängurus als Nachbarn hätte und keinen Biber. Von drei aufeinanderfolgenden Tieren sind also höchstens zwei Kängurus. Daher sind auch insgesamt höchstens zwei Drittel der Tiere Kängurus, das heisst höchstens $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$. Wie das Beispiel zeigt, sind 12 Kängurus möglich. Also ist 12 die grösstmögliche Anzahl.



16. Lilly, John und Malik werfen jeweils fünf Pfeile auf eine Zielscheibe. Pfeile, die im selben Ring landen, geben dieselbe Punktzahl. Lilly hat 46 Punkte erzielt und John 34 Punkte. Wie viele Punkte hat Malik erzielt?

China

(**A**) 37 (**B**) 38 (**C**) 39 (**D**) 40 (**E**) 41



Lösung: Wir können verwenden, dass bei Malik in jedem Ring genau halb so viele Pfeile gelandet sind wie bei Lilly und John zusammen. Maliks Punktzahl erhalten wir also, indem wir die Punkte von Lilly und John addieren und dann durch 2 teilen: $(46 + 34) : 2 = 40$.

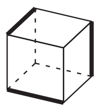
Alternativ können wir auch folgendermassen vorgehen: Bei Lilly sind zwei Pfeile mehr im inneren Ring als bei John, und bei John sind zwei Pfeile mehr im mittleren Ring als bei Lilly. Da Lilly 12 Punkte mehr als John hat, bringt jeder Pfeil im inneren Ring also $12 : 2 = 6$ Punkte mehr als ein Pfeil im mittleren Ring. Da bei Malik ein Pfeil mehr als bei John im inneren Ring und dafür einer weniger im mittleren Ring gelandet ist, hat er 6 Punkte mehr erzielt als John. Das sind $34 + 6 = 40$ Punkte.

17. Wie viele Kanten eines Würfels müssen mindestens rot gefärbt werden, damit jede Seitenfläche des Würfels mindestens eine rote Kante hat?

Belarus

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

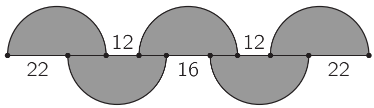
Lösung: Jede Kante des Würfels gehört zu genau 2 Seitenflächen. Da der Würfel 6 Seitenflächen hat, können es nicht weniger als $6 : 2 = 3$ rote Kanten sein, damit jede Seitenfläche mindestens eine rote Kante hat. Mit 3 roten Kanten kann jede der 6 Seitenflächen eine rote Kante haben, zum Beispiel, wenn als rote Kanten die im Bild markierten Kanten gewählt werden. Also ist (**A**) die Lösung.



18. In der Zeichnung sind fünf gleich grosse Halbkreise abgebildet und die Längen einiger Strecken in cm angegeben. Wie gross ist der Radius der Halbkreise?

Iran

(**A**) 14 cm (**B**) 15 cm (**C**) 17 cm (**D**) 18 cm (**E**) 20 cm



Lösung: Wir können die Länge der Strecke zwischen den beiden äussersten markierten Punkten auf zwei verschiedene Weisen angeben. Dazu bezeichnen wir die Länge des Durchmessers der Halbkreise mit d. Mit den drei oberen Halbkreisen erhalten wir, dass die Strecke zwischen den beiden äussersten markierten Punkten die Länge $d + 12\,\text{cm} + d + 12\,\text{cm} + d$ hat, und mit den beiden unteren Halbkreisen erhalten wir für dieselbe Strecke die Länge $22\,\text{cm} + d + 16\,\text{cm} + d + 22\,\text{cm}$. Daraus folgt $3 \cdot d + 24\,\text{cm} = 2 \cdot d + 60\,\text{cm}$, das heisst $d = 36\,\text{cm}$. Der Radius der Halbkreise ist also $36\,\text{cm} : 2 = 18\,\text{cm}$ gross.

19. Im rechts abgebildeten Ausdruck sollen das Quadrat und das Dreieck so durch natürliche Zahlen ersetzt werden, dass beide Seiten gleich gross sind. Wie viele verschiedene Zahlen können das Quadrat ersetzen?

Deutschland

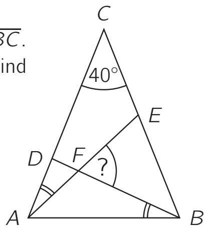
$$\frac{\square}{17} = \frac{5}{\triangle}$$

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

Lösung: Wir multiplizieren die Gleichung $\frac{\square}{17} = \frac{5}{\triangle}$ mit $17 \cdot \triangle$ und erhalten so $\square \cdot \triangle = 5 \cdot 17$. Also ist $\square$ ein Teiler von $5 \cdot 17$ und $\triangle$ ist durch $\square$ eindeutig bestimmt, $\triangle = 5 \cdot 17 : \square$. Da $5 \cdot 17$ die vier Teiler 1, 5, 17 und $5 \cdot 17 = 85$ hat, kann das Quadrat durch vier Zahlen ersetzt werden.

20. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit den gleich langen Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Der Winkel ACB ist 40° gross. Die beiden markierten Winkel EAC und DBA sind gleich gross. Wie gross ist der Winkel BFE?

Spanien



(**A**) 55° (**B**) 60° (**C**) 65° (**D**) 70° (**E**) 75°

Lösung: Weil das Dreieck ABC gleichschenklig ist, sind seine Basiswinkel BAC und CBA gleich gross. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° ist, gilt $\measuredangle BAC = \measuredangle CBA = (180° - 40°) : 2 = 70°$. Für den Innenwinkel BAF im Dreieck ABF gilt $\measuredangle BAF = 70° - \measuredangle EAC$. Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck ABF und der Voraussetzung $\measuredangle EAC = \measuredangle DBA$ erhalten wir $\measuredangle AFB = 180° - \measuredangle BAF - \measuredangle FBA = 180° - (70° - \measuredangle EAC) - \measuredangle EAC = 110°$. Der Winkel BFE ist der Nebenwinkel des Winkels AFB, es gilt also $\measuredangle BFE = 180° - \measuredangle AFB = 180° - 110° = 70°$.

Die Aufgabe lässt sich auch auf eine andere, interessante Weise lösen: Wir drehen die beiden Geraden, die durch F verlaufen, um den Punkt B gegen den Uhrzeigersinn um die Grösse der markierten Winkel. Dabei wird die Gerade FB auf die Gerade AB abgebildet und die Gerade FE auf eine zu AC parallele Gerade, da $\measuredangle EAC = \measuredangle DBA$ ist. Da sich Winkelgrössen beim Drehen nicht ändern, ist der Winkel BFE genauso gross wie der gedrehte Winkel, und der ist nach dem Stufenwinkelsatz genauso gross wie der Basiswinkel BAC des gleichschenkligen Dreiecks ABC, also $(180° - 40°) : 2 = 70°$.

21. Louis steht gelangweilt in einer Warteschlange. Er stellt fest, dass die Anzahl der Personen in der Schlange ein Vielfaches von 3 ist und dass vor ihm genauso viele Personen stehen wie hinter ihm. Er sieht zwei Freunde, die beide hinter ihm in der Schlange stehen, einer an der 19. Stelle und der andere an der 28. Stelle in der Schlange. An welcher Stelle in der Schlange steht Louis?

Spanien

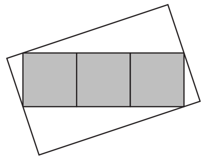
(**A**) an 14. (**B**) an 15. (**C**) an 16. (**D**) an 17. (**E**) an 18.

Lösung: Vor Louis können höchstens 17 Personen stehen, weil einer der Freunde an der 19. Stelle in der Schlange hinter ihm steht. Da hinter Louis genauso viele Personen wie vor ihm stehen, können es insgesamt also höchstens $17 + 1 + 17 = 35$ Personen in der Schlange sein. Es müssen ausserdem mindestens 28 Personen sein, weil der andere Freund an der 28. Stelle steht. Also kommen für die Anzahl der Personen in der Schlange nur die Zahlen 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 und 35 in Frage. Die Anzahl der Personen ist ein Vielfaches von 3 und, weil vor Louis genauso viele Personen stehen wie hinter ihm, ausserdem ungerade. Von den möglichen Zahlen ist nur 33 durch 3 teilbar und ungerade. Es sind also insgesamt 33 Personen in der Schlange. Louis steht somit an der 17. Stelle.

Wer kann aus neun verschiedenen Ziffern drei 3-stellige Zahlen bilden, deren Summe die Jahreszahl 2023 ist?

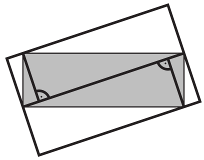
22. Die drei grauen Quadrate im Bild haben jedes einen Flächeninhalt von $16\,\text{cm}^2$. Sie bilden ein Rechteck, dessen Ecken auf den Seiten des grossen Rechtecks liegen. Zwei Eckpunkte des grauen Rechtecks fallen mit den Mittelpunkten der kürzeren Seiten des grossen Rechtecks zusammen. Welchen Flächeninhalt hat das grosse Rechteck?

Polen



(**A**) $76\,\text{cm}^2$ (**B**) $84\,\text{cm}^2$ (**C**) $86\,\text{cm}^2$ (**D**) $92\,\text{cm}^2$ (**E**) $96\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir verbinden die Mittelpunkte der kürzeren Seiten des grossen Rechtecks und zeichnen in den entstehenden grauen Dreiecken die zugehörigen Höhen ein. Da die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der kürzeren Seiten des grossen Rechtecks parallel zu den längeren Rechtecksseiten ist und die Höhen der grauen Dreiecke darauf senkrecht stehen, wird das grosse Rechteck auf diese Weise in vier kleinere Rechtecke zerlegt, von denen jeweils die Hälfte grau ist. Das lässt sich natürlich auch rechnerisch mithilfe der Flächeninhaltsformel für Dreiecke nachweisen. Die graue Fläche ist also halb so gross wie das grosse Rechteck und der gesuchte Flächeninhalt damit $2 \cdot (3 \cdot 16\,\text{cm}^2) = 96\,\text{cm}^2$.



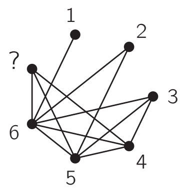
23. Die sieben Zwerge haben heute Schach gespielt. Seppl, der kleinste Zwerg, berichtet Schneewittchen: „Brummbär hat nur gegen einen Zwerg gespielt, Schlafmütz gegen zwei, Hatschi gegen drei, Pimpel gegen vier, Happy gegen fünf und Chef gegen sechs.“ „Dann weiss ich, gegen wie viele Zwerge du gespielt hast“, sagt Schneewittchen. Gegen wie viele Zwerge hat Seppl gespielt?

Ungarn

(**A**) zwei (**B**) drei (**C**) vier (**D**) fünf (**E**) sechs

Lösung: Chef hat gegen 6 Zwerge gespielt, also gegen jeden anderen – insbesondere gegen Seppl. Happy hat gegen 5 Zwerge gespielt. Einer davon ist Chef. Die anderen 4 müssen Schlafmütz, Hatschi, Pimpel und Seppl sein, da Brummbär sein eines Spiel gegen Chef gespielt hat und somit nicht zu den Gegnern von Happy gehört. Pimpel hat gegen 4 Zwerge gespielt. Einer davon ist Chef, ein weiterer ist Happy. Die beiden anderen Gegner von Pimpel sind Hatschi und Seppl, da Brummbär, wie eben schon erwähnt, sein eines Spiel gegen Chef gespielt hat und da Schlafmütz seine zwei Spiele gegen Chef und Happy gespielt hat. Damit ist auch klar, dass der dritte Gegner von Hatschi Pimpel ist. Nun sind die Gegner aller Zwerge klar. Seppl hat gegen drei Zwerge gespielt: gegen Chef, gegen Happy und gegen Pimpel.

Bei dieser Aufgabe kann eine Zeichnung helfen, den Überblick zu behalten. Für die Zwerge setzen wir Punkte und beschriften sie mit der Anzahl der Gegner. Dann verbinden wir die Punkte, beginnend beim Punkt mit der 6, also mit Chef, wenn die entsprechenden Zwerge gegeneinander gespielt haben.

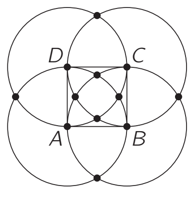


24. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge $1\,\text{cm}$. Wie viele verschiedene Punkte gibt es in der Ebene, die von zwei der Eckpunkte A, B, C, D jeweils $1\,\text{cm}$ entfernt sind?

Ungarn

(**A**) 6 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 16 (**E**) 20

Lösung: Ein Punkt in der Ebene ist von einem Eckpunkt des Quadrats genau dann $1\,\text{cm}$ entfernt, wenn er auf dem Kreis um diesen Eckpunkt mit dem Radius $1\,\text{cm}$ liegt. Genau dort, wo sich zwei der Kreise schneiden, liegt ein Punkt, der von zwei Eckpunkten jeweils $1\,\text{cm}$ entfernt ist. Aus dem Bild lesen wir ab, dass es genau 12 solche Punkte gibt.
Von den 12 Punkten gehören 8 Punkte zu benachbarten Eckpunkten, und zwar jeweils 2 Punkte. Und es gehören 4 Punkte zu gegenüberliegenden Eckpunkten, ebenfalls jeweils 2, und das sind genau die beiden jeweils anderen Eckpunkte.



25. Griechenland

Finja hat die Zahl 1015 als Summe von Zahlen geschrieben. Die Summanden enthalten nur die Ziffer 7, und zwar insgesamt 10-mal. Jetzt möchte Finja die Zahl 2023 als Summe von Zahlen schreiben. Wieder sollen die Summanden nur die Ziffer 7 enthalten, und zwar insgesamt 19-mal. Wie oft muss Finja dazu die Zahl 77 als Summand verwenden?

$$\begin{array}{rr} & 777 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 7 \\ \hline & 1015 \end{array}$$

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal

Lösung: Wer erkennt, dass $2023 = 2 \cdot 1015 - 7$ ist, kann schnell zur Lösung gelangen. Verdoppeln wir nämlich die Anzahl der Summanden in der gegebenen Addition und lassen einen Summanden 7 weg, so erhalten wir als Summe 2023 und verwenden wie gefordert insgesamt $2 \cdot 10 - 1 = 19$-mal die Ziffer 7. Der Summand 77 kommt 6-mal vor.

$$\begin{array}{rr} & 777 \\ + & 777 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 77 \\ + & 7 \\ \hline & 2023 \end{array}$$

Eine zweite Lösungsmöglichkeit ist folgende: Finja erhält die 3 an der Einerstelle von 2023 nur, wenn die Anzahl der Summanden 9 ist, da nur $9 \cdot 7, 19 \cdot 7, 29 \cdot 7, 39 \cdot 7, \ldots$ auf 3 enden und $19, 29, 39, \ldots$ nicht in Frage kommen, weil $19 \cdot 7 < 2023$ ist und sonst zu viele Ziffern 7 vorkämen. Wegen $2023 - 9 \cdot 7 = 1960$ endet die Summe der Zehnerziffern der Summanden auf 6, was nur möglich ist, wenn es 8 Zehnerziffern sind. Und wegen $1960 - 8 \cdot 70 = 1400$ endet die Summe der Hunderterziffern der Summanden auf 4, was nur möglich ist, wenn es 2 Hunderterziffern sind. Da $2 \cdot 700 = 1400$ ist, sind wir fertig und erhalten 2 Summanden 777, $8 - 2 = 6$ Summanden 77 (das sind die gesuchten) und $9 - 2 - 6 = 1$ Summand 7. Die Ziffer 7 kommt wegen $2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 19$ tatsächlich 19-mal vor, so wie gefordert.

26. China

Zum Trainingsbeginn läuft Elisabeth 3 Runden um den Sportplatz. Die erste Runde läuft sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 km/h, die zweite Runde läuft sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h, und die dritte Runde läuft sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 km/h. Was ist Elisabeths Durchschnittsgeschwindigkeit für diese 3 Runden?

(**A**) $\frac{72}{7}$ km/h (**B**) $\frac{59}{6}$ km/h (**C**) $\frac{53}{5}$ km/h (**D**) $\frac{41}{4}$ km/h (**E**) $\frac{29}{3}$ km/h

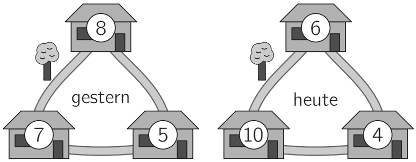
Lösung: Die Länge einer Runde sei s. Mit t_1, t_2 und t_3 bezeichnen wir die Zeit, die Elisabeth für die erste, die zweite bzw. die dritte Runde benötigt. Da Elisabeth jeweils mit konstanter Geschwindigkeit läuft, gelten $v_1 = 8\,\text{km/h} = \frac{s}{t_1}$, $v_2 = 10\,\text{km/h} = \frac{s}{t_2}$ und $v_3 = 15\,\text{km/h} = \frac{s}{t_3}$, umgestellt nach der Zeit also $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{8\,\text{km/h}}$, $t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{10\,\text{km/h}}$ und $t_3 = \frac{s}{v_3} = \frac{s}{15\,\text{km/h}}$. Elisabeths Gesamtzeit für die drei Runden ist $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{8\,\text{km/h}} + \frac{s}{10\,\text{km/h}} + \frac{s}{15\,\text{km/h}} = \frac{15s + 12s + 8s}{120\,\text{km/h}} = \frac{35s}{120\,\text{km/h}} = \frac{7s}{24\,\text{km/h}}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit v für die drei Runden erhalten wir dann, indem wir den Gesamtweg $3s$ durch die Gesamtzeit teilen: $v = 3s : \frac{7s}{24\,\text{km/h}} = \frac{3s \cdot 24\,\text{km/h}}{7s} = \frac{72}{7}\,\text{km/h}$.

Da die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit unabhängig von der Länge einer Runde ist, könnten wir auch eine konkrete Länge wählen, mit der sich gut rechnen lässt, zum Beispiel 120 km (auch, wenn das in der Realität viel zu lang wäre), da 120 durch 8, 10 und 15 teilbar ist. Dann läuft Elisabeth die erste Runde in $120\,\text{h} : 8 = 15\,\text{h}$, die zweite in $120\,\text{h} : 10 = 12\,\text{h}$ und die dritte in $120\,\text{h} : 15 = 8\,\text{h}$. Die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit ist $\frac{3 \cdot 120\,\text{km}}{15\,\text{h} + 12\,\text{h} + 8\,\text{h}} = \frac{72}{7}\,\text{km/h}$.

Drei natürliche Zahlen haben die Summe 12 und das Produkt 48.
Welche drei Zahlen sind das?

27. In drei benachbarten Häusern leben insgesamt 20 Mäuse. Letzte Nacht hat jede Maus ihr Haus verlassen und ist auf direktem Weg in eines der beiden anderen Häuser umgezogen. Die Zahlen in der Zeichnung geben die Anzahl der Mäuse pro Haus gestern und heute an. Wie viele Mäuse haben den Weg genommen, an dem der Baum steht?

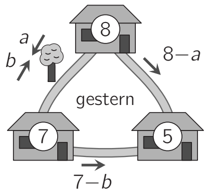
Griechenland



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 14

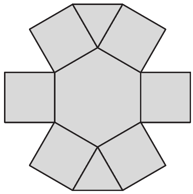
Lösung: Von den insgesamt $7+8=15$ Mäusen, die gestern in dem Haus links unten oder in dem Haus oben gewohnt haben, sind insgesamt 4 in das Haus rechts unten umgezogen, denn das sind genau die Mäuse, die heute dort wohnen. Weil jede Maus umgezogen ist, haben genau die anderen dieser 15 Mäuse den Weg, an dem der Baum steht, genommen, das heisst $15-4=11$ Mäuse.

Die Aufgabe lässt sich auch lösen, indem wir Variablen nutzen: Wir bezeichnen die Anzahl der Mäuse, die vom Haus oben in das Haus links unten umgezogen sind, mit a und die Anzahl der Mäuse, die vom Haus links unten in das Haus oben umgezogen sind, mit b. Dann sind von oben nach rechts unten $8-a$ Mäuse und von links unten nach rechts unten $7-b$ Mäuse umgezogen. Da heute im Haus rechts unten 4 Mäuse sind, gilt $(8-a)+(7-b)=4$. Daraus folgt $a+b=8+7-4=11$. Und genau das ist die gesuchte Anzahl.



28. Die rechts abgebildete Figur besteht aus 9 Feldern, die dreieckig, viereckig und sechseckig sind. Konstantin möchte die Zahlen von 1 bis 9 in die Felder schreiben. Dabei soll das Produkt der Zahlen in zwei Feldern, die eine gemeinsame Seite haben, nicht grösser als 15 sein. Auf wie viele verschiedene Arten kann er das tun?

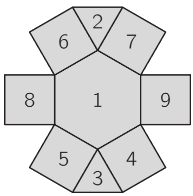
Iran



(**A**) 8 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 24 (**E**) 32

Lösung: Da bereits $8\cdot 2$ und $9\cdot 2$ grösser als 15 sind, können die Felder mit der 8 und der 9 nur an das Feld mit der 1 angrenzen. Die 8 und die 9 stehen also in den beiden Quadraten links und rechts, und die 1 gehört in die Mitte. Die Zahlen 4, 5, 6 und 7 dürfen nicht in Feldern mit einer gemeinsamen Seite stehen, weil jedes Produkt von zwei dieser Zahlen bereits grösser als 15 ist. Deshalb müssen diese vier Zahlen in den vier verbliebenen Quadraten stehen. Die 2 und die 3 stehen folglich in den beiden Dreiecken. Dabei müssen die 6 und die 7 in den Nachbarfeldern der 2 stehen, weil $6\cdot 3$ und $7\cdot 3$ grösser als 15 sind. Die 4 und die 5 stehen folglich in den Nachbarfeldern der 3.

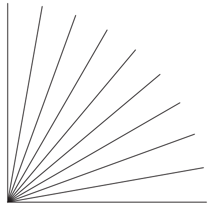
Jede Anordnung der 9 Zahlen, die die zuvor beschriebenen Eigenschaften erfüllt, ist auch möglich. Dabei gibt es jeweils unabhängig voneinander 2 Möglichkeiten, die 8 und die 9 einzutragen (links oder rechts), 2 Möglichkeiten, die 2 und die 3 einzutragen (oben oder unten), 2 Möglichkeiten, die 6 und die 7 einzutragen (links oder rechts von der 2) und 2 Möglichkeiten, die 4 und die 5 einzutragen (links oder rechts von der 3) und damit insgesamt $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ Möglichkeiten. Ein Beispiel, wie das aussehen kann, ist im Bild rechts zu sehen.



Stell dir vor, du multiplizierst alle Zahlen von 1 bis 2023. Auf welche Ziffer endet dieses riesige Produkt?

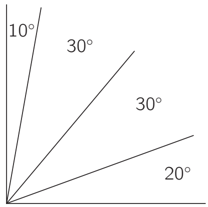
29. Alina hat mit dem Bleistift 10 Strahlen gezeichnet. Benachbarte Strahlen schliessen jeweils einen Winkel der Grösse 10° ein. Was ist die grösste Anzahl an Strahlen, die sie so wegradieren kann, dass sie immer noch für jeden der Werte 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80° und 90° zwei Strahlen finden kann, die einen Winkel dieser Grösse einschließen?

Belarus



(**A**) 6 (**B**) 5 (**C**) 4 (**D**) 3 (**E**) 2

Lösung: Wir überlegen, wie viele Strahlen übrig bleiben müssen. Um 9 verschiedene Werte für die eingeschlossenen Winkel messen zu können, muss es mindestens 9 Möglichkeiten geben, 2 verschiedene Strahlen als Schenkel auszuwählen. Es müssen mehr als 2 Strahlen sein, denn bei 2 Strahlen gibt es nur eine Möglichkeit, 2 Strahlen auszuwählen. Bei 3 Strahlen kommen 2 Möglichkeiten hinzu, wenn wir den dritten Strahl und einen der beiden anderen wählen, also sind es insgesamt $1 + 2 = 3$ Möglichkeiten. Bei 4 Strahlen kommen 3 Möglichkeiten hinzu, wenn wir den vierten Strahl und einen der drei anderen wählen, also sind es insgesamt $3 + 3 = 6$ Möglichkeiten. Bei 5 Strahlen kommen 4 Möglichkeiten hinzu, wenn wir den fünften Strahl und einen der vier anderen wählen, also sind es insgesamt $6+4 = 10$ Möglichkeiten. Somit ist 5 die kleinste Anzahl an Strahlen, bei der es mindestens 9 Möglichkeiten gibt, 2 Strahlen auszuwählen. Wir überlegen, ob es möglich ist, die Strahlen so übrig zu lassen, dass tatsächlich die geforderten Werte gemessen werden können. Sicher müssen die beiden äusseren Strahlen für den 90°-Winkel dabei sein und, um 80° messen zu können, ein Strahl, der 10° von einem Randstrahl entfernt ist. Um 70° messen zu können, wählen wir den Strahl, der 20° vom anderen Randstrahl entfernt ist (es gibt auch andere Möglichkeiten, aber so haben wir auf jeden Fall bis hierher keine Winkelgrösse mehrfach dabei, davon darf es ja höchstens eine geben). Wie der fünfte Strahl passen könnte, finden wir durch Probieren, zum Beispiel so wie im Bild rechts. Bei diesen 5 Strahlen können wir tatsächlich alle 9 Werte von 10° bis 90° messen. Die grösste Anzahl an Strahlen, die Alina wegradieren kann, ist also $10 - 5 = 5$.



— Ein ähnliches, aber einfacheres Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 23 gestellt. —

Es gibt noch drei weitere Möglichkeiten, wie die verbleibenden Strahlen gewählt werden können. Wer findet sie?

30. In der letzten Saison hat ein Handball-Team im 7. Spiel 33 Tore, im 8. Spiel 27 Tore und im 9. Spiel 29 Tore geworfen. Im Durchschnitt hat das Team nach 9 Spielen mehr Tore geworfen als nach den ersten 6 Spielen. Nach dem 10. Spiel war die durchschnittliche Anzahl an Toren pro Spiel grösser als 30. Wie viele Tore hat das Team im 10. Spiel mindestens geworfen?

Südafrika

(**A**) 32 (**B**) 33 (**C**) 34 (**D**) 35 (**E**) 36

Lösung: Weil das Team nach 9 Spielen im Durchschnitt mehr Tore geworfen hat als nach 6 Spielen, war die durchschnittliche Anzahl an Toren bei den Spielen 7, 8 und 9 grösser als bei den ersten 6 Spielen. Im 7., 8. und 9. Spiel wurden insgesamt $33 + 27 + 29 = 89$ Tore geworfen. In den ersten 6 Spielen hat das Team insgesamt also weniger als $\frac{89}{3} \cdot 6 = 178$ Tore geworfen, das heisst höchstens 177. Folglich kann das Team in den ersten 9 Spielen insgesamt höchstens $177 + 89 = 266$ Tore geworfen haben. Damit die durchschnittliche Anzahl an Toren pro Spiel nach 10 Spielen grösser als 30 ist, muss das Team in allen 10 Spielen zusammen mindestens $10 \cdot 30 + 1 = 301$ Tore geworfen haben. Im 10. Spiel waren es also mindestens $301 - 266 = 35$ Tore.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Antwort	D	E	C	A	C	B
Aufgabe	7	8	9	10	11	12
Antwort	A	C	E	B	A	E
Aufgabe	13	14	15	16	17	18
Antwort	D	B	A	D	E	E

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

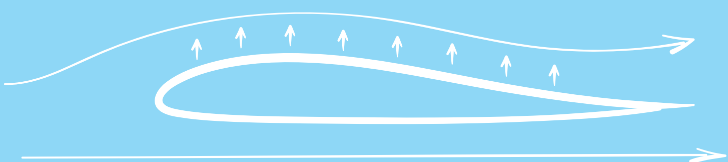
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	A	D	C	B	A	B	E	B
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	E	C	B	C	A	D	E	A
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	A	E	C	D	C	B	C	D

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	D	E	A	B	D	C	D	A	B	A
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	E	E	C	B	D	A	D	B	D
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	B	C	E	A	C	C	B	D

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra Knobeleien ist hier zu finden.

Der Traum vom Fliegen beschäftigte schon viele Menschen, so auch Otto Lilienthal, der vor 175 Jahren geboren wurde und dem das Titelbild gewidmet ist. Er studierte den Vogelflug und untersuchte den Auftrieb verschieden geformter Flächen. Mit selbstgebauten Flugapparaten gelangen ihm bis zu 250 Meter weite Gleitflüge.
Er erkannte den Vorteil gewölbter Flächen und legte so den Grundstein für den Bau moderner Flugzeuge.



grafik | steffen blankenburg | elephant-castle.de

www.kaenguru-schweiz.ch
www.kangourou-suisse.ch