2022

# Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien
... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2022“

Im Jahre 2003 wurde der Känguru-Wettbewerb in der Schweiz zum ersten Mal mit rund 2700 Teilnehmenden offiziell durchgeführt. Somit haben wir dieses Jahr die 20. Austragung erlebt und die heurige effektive Teilnehmerzahl von weit über 50'000 (die exakte Zahl ist zum Zeitpunkt der Drucklegung noch nicht bekannt) bedeutet einen Zuwachs in der Grössenordnung von 2000%!

Einmal mehr gilt ein herzliches Dankeschön den vielen Lehrpersonen aus fast 800 Schulen. Sie haben den Wettbewerb vor Ort organisiert und für Lust auf Mathematik geworben. Die meisten Schülerinnen und Schüler haben die Aufgaben in der Schule in papiererner Form erhalten und gelöst. Die Möglichkeit, den Wettbewerb online durchzuführen – was im ersten Coronajahr eine Notlösung war – haben wir beibehalten. Und somit haben dieses Jahr auch wieder einige Schulen ihren Kindern diese moderne Art ermöglicht, allerdings unter Aufsicht an der Schule.

Sicher haben die Aufgaben auch dazu angeregt, sich im Anschluss noch mit Freunden oder in der Familie über die Aufgaben auszutauschen. Wir hoffen gemeinsam mit den organisierenden Lehrerinnen und Lehrern, dass sich alle mit Freude mit den mathematischen Problemen beschäftigt und Lust auf weitere bekommen haben. Dazu finden sich Anregungen in dieser Broschüre.

Auch in den anderen fast 100 Ländern, die in der internationalen Assoziation „Kangourou sans frontières“ zusammenarbeiten, haben sich Kinder und Jugendliche gemeinsam mit den Schweizer Teilnehmenden an den Aufgaben versucht. Das Interessante und Vielgestaltige der Aufgaben rührt vor allem daher, dass unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den verschiedenen Ländern und Kulturen einfliessen.

In diesem Jahr gab es Fragestellungen zu gestapelten Zügelkisten, einem Kratzbaum für die Katze und einer gemusterten Picknickdecke. In anderen Aufgaben ging es um den Kauf von Luftballons, das Rangieren auf dem Parkplatz oder Stapel von Schüsseln. Neben richtigem Rechnen waren kluges Denken, geschicktes Kombinieren, ein gutes Gefühl für Grössenordnungen und Vorstellungsvermögen gefragt. Das alles sind Fertigkeiten, die im Mathematikunterricht in besonderem Masse geübt werden und die uns im täglichen Leben helfen, Fragen und Problemen durch mathematisches Denken, logisches Schliessen und Strukturieren mit klugen Lösungen zu begegnen.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack und A. Unger unter Mitwirkung von M. Cannizzo, S. Czekay, L. Fischer, N. Hadjimina, B. Hell, Familie Hutschenreiter, L. Jahn, Dr. M. Jarmer, B. Maier, Dr. A. Noack, S. Schlinske, A. Stahel und Dr. D. Vigerske erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

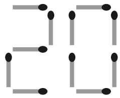
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

# Klassenstufen 3 und 4

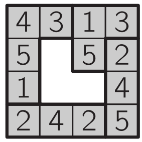
**1.** Finja legt mit Streichhölzern die Jahreszahl 2022. Eine 2 und die 0 sind schon fertig. Wie viele Streichhölzer braucht Finja insgesamt?



(**A**) 21 (**B**) 23 (**C**) 24 (**D**) 27 (**E**) 29

*Lösung:* Wir zählen die Streichhölzer im Bild: Für eine 2 sind 5 Streichhölzer nötig, und für die 0 sind es 6 Streichhölzer. Für die drei Zweien in der Jahreszahl 2022 braucht Finja also $3 \cdot 5 = 15$ Streichhölzer und für die komplette Jahreszahl insgesamt $15 + 6 = 21$ Streichhölzer.

**2.** Erik hat ein Puzzle gelegt. Ein Teil fehlt noch. In Nachbarfeldern sollen immer verschiedene Zahlen stehen. Welches Teil passt?




(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 


*Lösung:* In den Nachbarfeldern des oberen Kästchens des fehlenden Teils stehen 3, 5 und 5. Also darf im oberen Kästchen des fehlenden Teils keine 3 und keine 5 stehen. Die Teile bei (**A**), (**B**) und (**E**) passen daher nicht. Im linken unteren Kästchen des fehlenden Teils darf keine 1 und keine 4 stehen. Also passt das Teil bei (**D**) auch nicht. Nur das Teil bei (**C**) passt, das ist die Lösung.

**3.** Welche beiden Zahlen können in die beiden Kästchen so eingetragen werden, dass die Rechnung richtig ist?

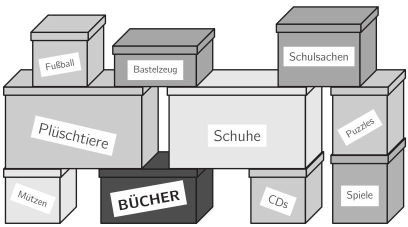
$$20 + \square = 22 + \square$$

(**A**) 1 und 4 (**B**) 4 und 3 (**C**) 2 und 7 (**D**) 5 und 3 (**E**) 8 und 9

*Lösung:* Die 20 links vom Gleichheitszeichen ist um 2 kleiner als die 22 rechts davon. Also muss die Zahl im linken Kästchen um 2 größer sein als die Zahl im rechten Kästchen. Dafür gibt es viele Möglichkeiten, aber von den Antworten trifft das nur auf 5 und 3 zu. Also ist (**D**) die Lösung.

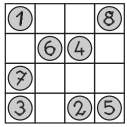
**4.** Lena sucht ihr Lieblingsbuch. Ihre Familie ist gerade umgezogen. Im Flur sind lauter Kisten gestapelt. Wie viele Kisten muss Lena wegräumen, um an die Bücherkiste zu kommen?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7




*Lösung:* Um an die Bücherkiste zu kommen, muss Lena die 2 Kisten, die direkt auf ihr stehen, wegräumen. Um an diese zu kommen, muss sie alle Kisten wegräumen, die auf diesen beiden stehen, und das sind alle 3 Kisten ganz oben. Das genügt, insgesamt muss Lena 5 Kisten wegräumen.

**5.** In jeder waagerechten Reihe und in jeder senkrechten Reihe sollen genau 2 Münzen liegen. Dazu soll eine der Münzen auf ein anderes Feld umgelegt werden. Welche?

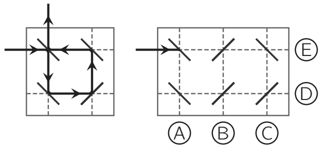



(**A**) 5 (**B**) 1 (**C**) 4 (**D**) 7 (**E**) 3

*Lösung:* Die gesuchte Münze muss in der senkrechten Reihe ganz links liegen, denn dort liegen 3 Münzen, das heißt eine zu viel. Die gesuchte Münze muss aber auch in der waagerechten Reihe ganz unten liegen, denn dort liegen ebenfalls 3 Münzen, wiederum eine zu viel. Dann kann die gesuchte Münze nur 3 bei (**E**) sein. Sie muss in das Feld rechts neben 7 gelegt werden.

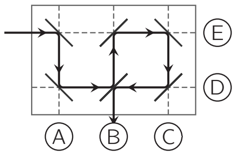
*In der letzten Aufgabe kann das Ziel (in jeder waagerechten und senkrechten Reihe genau 2 Münzen), auch erreicht werden, indem 2 Münzen jeweils auf ein leeres Feld verschoben werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?*

**6.** Ein Laserstrahl wird abgelenkt wie im linken Bild. Die Wände, auf die er trifft, haben auf beiden Seiten einen Spiegel. Bei welchem Buchstaben endet der Laserstrahl im rechten Bild?

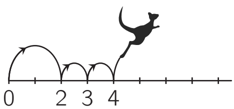



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

*Lösung:* Wir setzen den Laserstrahl im rechten Bild fort und achten darauf, dass er an jeder Wand richtig gespiegelt wird. Der Laserstrahl endet bei B.




**7.** Känguru Kai springt auf dem Zahlenstrahl von der 0 zur 16. Wie im Bild macht er immer einen langen Sprung und dann zwei kurze Sprünge. Wie viele Sprünge sind das insgesamt?

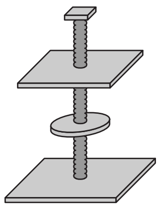


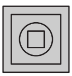
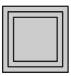
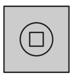
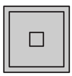
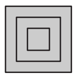

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

*Lösung:* Mit 3 Sprüngen gelangt Känguru Kai zur 4, mit den nächsten 3 Sprüngen zur 8, mit den nächsten 3 Sprüngen zur 12, und mit den nächsten 3 Sprüngen erreicht er die 16. Känguru Kai macht insgesamt also 4-mal 3 Sprünge, das heißt $4 \cdot 3 = 12$.

— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 4 zu lösen.* —

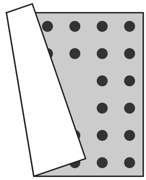
**8.** Für unsere Katze Sissi haben meine Eltern einen Kratzbaum gebaut. Wie sieht der Kratzbaum von oben aus?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

*Lösung:* Die runde Scheibe wird von der quadratischen direkt darüber verdeckt und ist von oben nicht zu sehen. Damit fallen (**A**) und (**C**) weg. Alle drei quadratischen Scheiben sind von oben zu sehen. Dabei ist die oberste Scheibe deutlich kleiner ist als die beiden großen. Diese unterscheiden sich nur wenig. Also ist (**D**) das gesuchte Bild.

**9.** Der Wind hat einen Teil unserer Picknickdecke umgeklappt. Sie ist quadratisch und an jeder Seite sind zwei Reihen mit jeweils gleich vielen dunklen Punkten. Wie viele dunkle Punkte sind es insgesamt?



(**A**) 34 (**B**) 32 (**C**) 30 (**D**) 28 (**E**) 26

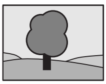
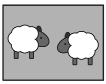
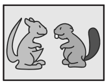
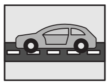
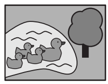
*Lösung:* Da die Picknickdecke quadratisch ist, befinden sich in jeder der 4 Ecken 4 dunkle Punkte, und dazwischen sind an jeder der 4 Seiten ebenso 4 dunkle Punkte. In den Ecken sind also insgesamt $4 \cdot 4 = 16$ dunkle Punkte und dazwischen an den Seiten ebenso $4 \cdot 4 = 16$. Insgesamt sind auf der Picknickdecke $16 + 16 = 32$ dunkle Punkte.
Hier ist noch ein anderer Lösungsweg: Weil die Picknickdecke quadratisch ist und rundherum 2 Reihen dunkle Punkte sind, ist das „Loch" in der Mitte auch quadratisch, und im Bild erkennen wir, dass genau 4 dunkle Punkte in der Mitte „fehlen". Würden wir diese dazumalen, wären auf der Picknickdecke 6 waagerechte Reihen mit je 6 Punkten, insgesamt also $6 \cdot 6 = 36$. Somit sind auf der Picknickdecke $36 - 4 = 32$ dunkle Punkte.

**10.** Ich soll vier 2 Meter lange Leisten in Stücke zersägen. Jedes Stück soll einen halben Meter lang sein. Wie oft muss ich sägen?

(**A**) 10-mal (**B**) 12-mal (**C**) 14-mal (**D**) 18-mal (**E**) 20-mal

*Lösung:* Aus einer 2 Meter langen Leiste bekomme ich 4 Stücke, die jeweils einen halben Meter lang sind. Für die 4 Stücke muss ich die Leiste 3-mal zersägen. Um alle 4 Leisten vollständig zu zersägen, muss ich also $4 \cdot 3 = 12$-mal sägen.

**11.** Fünf Freunde haben jeder ein Bild gemalt. Leon hat keine Enten gemalt. Auf Elisas Bild ist ein Baum zu sehen. Paula hat genau zwei Tiere gemalt. Mike hat ein Auto gemalt. Auf Yusufs Bild sind Schafe. Welches Bild ist von Leon?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

*Lösung:* Beim Durchlesen des Aufgabentextes fällt auf, dass für zwei der Bilder die Zuordnung der Bilder klar ist: Von Mike ist das Bild bei (**D**), von Yusuf ist das Bild bei (**B**). Von den übrigen Bildern sind nur auf dem Bild bei (**C**) genau zwei Tiere zu sehen, und zwar ein Känguru und ein Biber, das ist also das Bild von Paula. Welches Elisas Bild ist, können wir noch nicht sagen, aber da Leon keine Enten gemalt hat, muss von ihm das Bild bei (**A**) sein, und das war gesucht.

**12.** Familie Zipl war Pilze sammeln. Von den Eltern und den vier Kindern hat einer 10 Pilze gefunden und die anderen 8, 6, 5, 4 und 2. Die vier Kinder haben insgesamt 22 Pilze gefunden. Wie viele Pilze haben die Eltern gefunden?

(**A**) 2 und 8 (**B**) 4 und 5 (**C**) 5 und 8 (**D**) 6 und 8 (**E**) 6 und 10

*Lösung:* Familie Zipl hat insgesamt $10 + 8 + 6 + 5 + 4 + 2 = 35$ Pilze gefunden. Weil die Kinder 22 Pilze gefunden haben, haben die Eltern zusammen $35 - 22 = 13$ Pilze gefunden. Nun können wir einfach die Antworten durchgehen und finden (**C**) als Lösung.

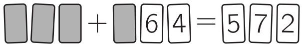
*Henry schreibt der Größe nach die ersten 20 Zahlen auf, die nur aus den Ziffern 0 und 2 bestehen: 2, 20, 22, 200, 202 usw. Als wievielte Zahl schreibt Henry die Jahreszahl 2022? Und welches ist die 20. Zahl auf seiner Liste?*

**13.** Bei einem Radrennen führt der Fahrer mit Startnummer 1, dahinter folgen 2, 3, 4 in dieser Reihenfolge. Da überholt der letzte der vier Fahrer die beiden Fahrer vor ihm. Und kurz vor der Ziellinie überholt der Fahrer, der jetzt Vorletzter ist, die beiden Fahrer vor ihm. In welcher Reihenfolge kommen die Radfahrer ins Ziel?

(**A**) 2, 1, 4, 3 (**B**) 3, 2, 1, 4 (**C**) 4, 1, 2, 3 (**D**) 2, 3, 4, 1 (**E**) 1, 2, 4, 3

*Lösung:* Nachdem der letzte Fahrer in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4 die beiden Fahrer vor ihm überholt hat, ist die neue Reihenfolge 1, 4, 2, 3. Schließlich überholt der Fahrer, der jetzt Vorletzter ist, also Fahrer 2, die beiden Fahrer vor ihm. Damit ist die Reihenfolge im Ziel 2, 1, 4, 3, wie es bei (**A**) steht.

**14.** Leo hat mit Zahlenkarten eine Gleichung gelegt. Dann hat er vier Karten umgedreht. Wie groß ist die Summe der Ziffern auf den umgedrehten Karten?




(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 14

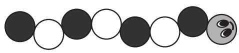
*Lösung:* Da der zweite Summand auf 4 endet und das Ergebnis der Rechenaufgabe auf 2 endet, muss der erste Summand auf 8 enden. Von den Einern gibt es dann einen Übertrag 1, der zusammen mit der 6 an der Zehnerstelle des zweiten Summanden 7 ergibt. Das ist schon der Zehner des Ergebnisses. Also ist der Zehner des ersten Summanden 0. Von den Zehnern kommt kein Übertrag. Also ergeben die beiden Hunderter der Summanden zusammen 5. Wie die Hunderter genau lauten, können wir nicht sagen. Das ist aber auch nicht wichtig, denn es ist ja nach der Summe der vier Ziffern auf den umgedrehten Karten gefragt. Die gesuchte Summe ist $8 + 0 + 5 = 13$.

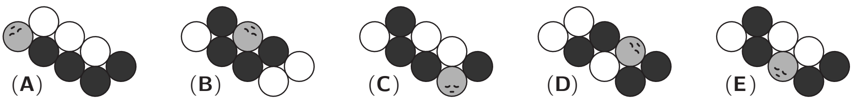
**15.** Mein Vater hat eine Pizza gebacken und sie in 12 Stücke geschnitten. Als Belag gibt es Paprika, Mais und Spinat, jedes Stück ist belegt. Auf 3 Stücken ist nur Paprika. Auf 7 Stücken ist Mais, und auf 5 Stücken ist Spinat. Wie viele Stücke sind mit Mais <u>und</u> Spinat belegt?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

*Lösung:* Auf 3 Stücken ist nur Paprika, und 7 andere Stücke sind mit Mais belegt. Da jedes Stück belegt ist, muss auf den restlichen $12-3-7 = 2$ Stücken Spinat liegen. Die übrigen $5-2 = 3$ Stücke mit Spinat können nur zu denen gehören, auf denen auch Mais liegt. Also sind 3 Stücke sowohl mit Mais als auch mit Spinat belegt.

**16.** Eine Raupe hat sich zum Schlafen zusammengefaltet. Wie könnte das aussehen?

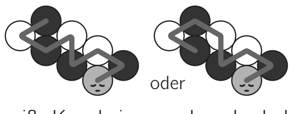




(**A**) (**B**) (**C**) (**D**) (**E**)

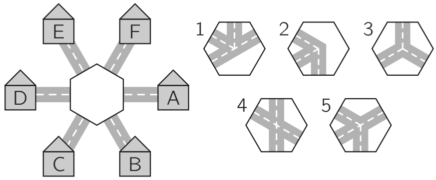
*Lösung:* Rechts ist zu sehen, wie sich die Raupe so zusammenfalten kann, dass sie wie in Bild (**C**) liegt – das ist die Lösung. Dass die anderen Schlafpositionen nicht möglich sind, sehen wir am besten, indem wir beim Kopf beginnend versuchen, mit dem Finger oder einem Stift Kugel für Kugel so nachzufahren, dass schwarze und weiße Kugeln immer abwechselnd aufeinanderfolgen. In keinem der vier Bilder kann die komplette Raupe wiedergefunden werden.

*— Eine ähnliche Aufgabe war Aufgabe 8 in Klassenstufe 5/6. —*



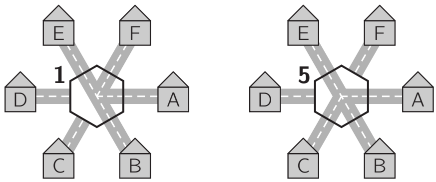

*Salome zeichnet ein Quadrat und ein Dreieck.*
*In wie vielen Punkten können sich die beiden Figuren höchstens schneiden?*

**17.** Zwei der abgebildeten Teile können so in die Mitte gelegt werden, dass Haus A mit den Häusern B und E verbunden ist, aber nicht mit Haus D. Welche beiden Teile sind das?




(**A**) 1 und 2 (**B**) 2 und 3 (**C**) 1 und 4
(**D**) 4 und 5 (**E**) 1 und 5

*Lösung:* Wenn das Haus A mit den Häusern B und E verbunden ist, sind B und E natürlich auch miteinander verbunden. Das geht nur mit einem geraden Straßenstück von einer Seite zur gegenüberliegenden. Die Teile 2 und 3 entfallen daher. Bei Teil 4 führt jedes Straßenstück, das bei A beginnt, auf die gegenüberliegende Seite zu D, mit dem aber <u>keine</u> Verbindung bestehen soll. Teil 4 entfällt also auch. Da zwei Teile gesucht sind, können das nur 1 und 5 sein, so wie in (**E**) angegeben. Wie die beiden Teile platziert werden müssen, um die Bedingungen zu erfüllen, ist abgebildet.

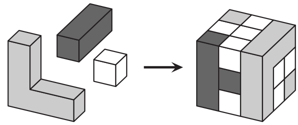



**18.** Beim Kreisfinale im Zweifelderball treten 3 Grundschulen gegeneinander an. Jedes der 3 Teams spielt einmal gegen jedes andere. Wer ein Spiel gewinnt, erhält 3 Punkte. Wer verliert, erhält 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten beide Teams 1 Punkt. Wie viele Punkte kann <u>keines</u> der Teams insgesamt erreichen?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

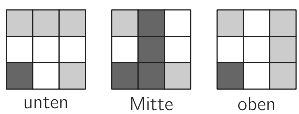
*Lösung:* Von 3 Teams spielt jedes Team einmal gegen jedes andere. Also hat jedes Team 2 Spiele. Jedes Team kann in jedem seiner beiden Spiele 3, 1 oder 0 Punkte erhalten. Für die Gesamtpunktzahl ergeben sich damit die folgenden Möglichkeiten: $(3+3=)\,6$, $(3+1=)\,4$, $(3+0=)\,3$, $(1+1=)\,2$, $(1+0=)\,1$, $(0+0=)\,0$. Da 5 nicht dabei ist, ist (**D**) die Lösung.

**19.** Mit drei Sorten von Bausteinen wurde wie abgebildet ein Würfel gebaut. Wie viele der kleinen weißen Würfel wurden dabei benutzt?



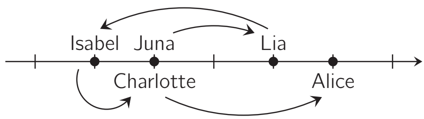
(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 13
(**D**) 16 (**E**) 19

*Lösung:* Zuerst überlegen wir uns, wie viele dunkelgraue „Stäbe“ und hellgraue „Winkel“ im großen Würfel verbaut sind. Ein Stab ist so lang wie 3 kleine weiße Würfel und reicht im großen Würfel immer von einer Seitenfläche zur gegenüberliegenden, egal wie er verbaut ist. Da wir im Bild von zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels jeweils eine sehen, sehen wir auch von jedem verbauten Stab etwas. Also sind genau 2 Stäbe verbaut, der eine links vorn und der zweite in der mittleren Schicht. Mit den Winkeln ist es ähnlich. Ein Winkel ist so groß wie 5 kleine weiße Würfel und reicht immer von einer Seitenfläche zur gegenüberliegenden. Die beiden hellgrauen Quadrate unten rechts und oben müssen zum selben Winkel gehören. Also sind genau 2 Winkel verbaut.
Wenn wir uns nun vorstellen, dass der große Würfel komplett aus kleinen Würfeln gebaut wäre, dann könnten wir ihn in 3 Schichten zerlegen, die jede 3 Würfel lang und 3 Würfel breit wäre. Jede Schicht bestünde aus $3 \cdot 3 = 9$ kleinen Würfeln und der große Würfel aus insgesamt $3 \cdot 9 = 27$. Die 2 Stäbe und 2 Winkel nehmen also den Platz von $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$ kleinen Würfeln ein, sodass tatsächlich nur $27 - 16 = 11$ kleine weiße Würfel benutzt wurden.
Wer ein gutes Vorstellungsvermögen hat, kann sich die einzelnen Schichten des großen Würfels auch aufzeichnen (siehe Bild) und die 11 kleinen weißen Würfel auszählen.



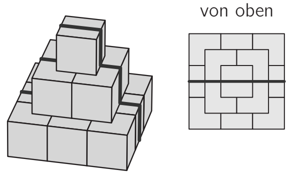
**20.** Fünf Freundinnen haben jede ein Aquarium zu Hause. Lia hat 2 Fische mehr als Juna. Isabel hat 3 Fische weniger als Lia. Charlotte hat einen Fisch mehr als Isabel und 3 Fische weniger als Alice. Zwei Mädchen haben gleich viele Fische. Welche?

(**A**) Charlotte und Juna (**B**) Charlotte und Lia (**C**) Lia und Alice
(**D**) Juna und Alice (**E**) Alice und Isabel



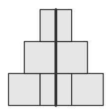

*Lösung:* Zur Lösung dieser Aufgabe hilft uns ein Ausschnitt des Zahlenstrahls. Wir wissen ja von keiner einzigen, wie viele Fische sie genau besitzt. Wir markieren zuerst einen Punkt für Juna und dann 2 Einheiten rechts davon einen Punkt für Lia, denn sie hat 2 Fische mehr als Juna. Der Punkt für Isabel ist 3 Einheiten links von Lia. Für Charlotte markieren wir einen Punkt eine Einheit rechts von Isabel. Damit haben wir auch schon die Lösung gefunden. Charlotte und Juna haben gleich viele Fische.

**21.** Eine Schnecke trifft im Garten auf eine Pyramide, die aus Würfeln der Seitenlänge 10 cm gebaut ist. Sie nimmt kräftig Anlauf und kriecht mittig über das Hindernis. Die Spur, die sie auf der Pyramide hinterlässt, ist rechts zu sehen. Wie lang ist die gesamte Spur auf der Pyramide?

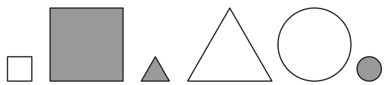



(**A**) 50 cm (**B**) 60 cm (**C**) 70 cm (**D**) 80 cm (**E**) 90 cm

*Lösung:* Aus der Ansicht von oben erkennen wir gut, dass die Schnecke von links nach rechts insgesamt eine Länge von 3 Würfel-Seitenlängen kriecht. Das sind $3 \cdot 10\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Wenn wir uns vorstellen, wie die Pyramide von links und von rechts aussieht (siehe Bild), erkennen wir, dass die Schnecke insgesamt die Länge von 3 Würfel-Seitenlängen nach oben und ebenso die Länge von 3 Würfel-Seitenlängen nach unten kriecht. Das sind auch jeweils 30 cm. Also ist die gesamte Spur auf der Pyramide $3 \cdot 30\,\text{cm} = 90\,\text{cm}$ lang.



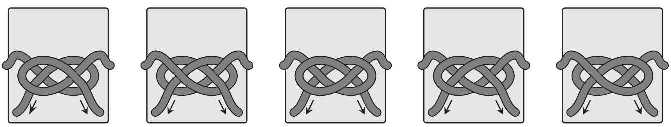

**22.** Von den abgebildeten Figuren will ich einige so auswählen, dass ich 2 dunkle, 2 große und 2 runde Figuren dabei habe. Wie viele Figuren <u>muss</u> ich <u>mindestens</u> auswählen?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

*Lösung:* Es gibt 3 dunkle, 3 große, aber nur 2 runde Figuren. Damit ich 2 runde Figuren dabei habe, muss ich also auf jeden Fall die beiden Kreise auswählen. Mit diesen beiden Figuren habe ich eine dunkle und eine große Figur dabei. Es sollen aber 2 dunkle und 2 große sein. Es würde genügen, <u>eine</u> weitere Figur auszuwählen, die <u>gleichzeitig</u> dunkel <u>und</u> groß ist. Und eine solche Figur gibt es: das große dunkle Quadrat. Mit 3 Figuren klappt es also schon, (**B**) ist richtig.

*Aayana packt ein Geschenk ein. Bevor sie eine Schleife binden kann, muss sie einen Knoten machen. In welchem Bild entsteht ein Knoten, wenn Aayana an den beiden Enden des Geschenkbands zieht?*



**23.** Gert, der Grashüpfer, hüpft eine Treppe von unten nach oben und zurück nach unten. Nach oben nimmt er immer 2 Stufen auf einmal. Nach unten nimmt er immer 3 Stufen auf einmal. Insgesamt braucht Gert 40 Hüpfer. Wie viele Stufen hat die Treppe?

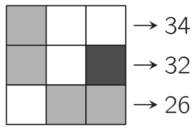
(**A**) 36 (**B**) 42 (**C**) 44 (**D**) 48 (**E**) 54

*Lösung:* Da Gert von unten nach oben immer 2 Stufen auf einmal nimmt, ist die Anzahl der Stufen ein Vielfaches von 2. Da Gert von oben nach unten immer 3 Stufen auf einmal nimmt, ist die Anzahl der Stufen ein Vielfaches von 3. Also ist die Anzahl der Stufen ein Vielfaches von 6, und wir können in Gedanken die Treppe in Absätze aus je 6 Stufen teilen. Für jeden dieser Absätze braucht Gert 3 Hüpfer nach oben und 2 Hüpfer nach unten, zusammen also 5 Hüpfer. Da Gert insgesamt 40 Hüpfer macht und $40 = 8 \cdot 5$ gilt, bewältigt er 8 Absätze aus je 6 Stufen, d. h. $8 \cdot 6 = 48$ Stufen.
Wer mag, kann auch für jede der Antwortmöglichkeiten ausrechnen, wie viele Sprünge Gert in diesem Fall von unten nach oben sowie von oben nach unten machen würde.

| | Hüpfer nach oben | Hüpfer nach unten | Hüpfer insgesamt |
|---|---|---|---|
| (**A**) | $36 : 2 = 18$ | $36 : 3 = 12$ | $18 + 12 = 30$ |
| (**B**) | $42 : 2 = 21$ | $42 : 3 = 14$ | $21 + 14 = 35$ |
| (**C**) | $44 : 2 = 22$ | 44 : 3 nicht möglich | — |
| (**D**) | $48 : 2 = 24$ | $48 : 3 = 16$ | $24 + 16 = 40$ |
| (**E**) | $54 : 2 = 27$ | $54 : 3 = 18$ | $27 + 18 = 45$ |

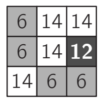
Nur bei (**D**) ist die Summe 40, das ist also die Lösung.

**24.** In die Felder im Bild rechts sollen Zahlen eingetragen werden. In gleichfarbige Felder gehört dieselbe Zahl. Rechts sind die Summen der Zahlen in den Zeilen angegeben. Welche Zahl gehört in das dunkelgraue Feld?




(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 14

*Lösung:* Wüssten wir die Summe der beiden Zahlen, die in ein weißes und in ein hellgraues Feld gehören, dann könnten wir die Zahl, die in das dunkelgraue Feld gehört, als Differenz zu 32 berechnen. Wie finden wir nun heraus, wie groß diese Summe ist? In der ersten Zeile gibt es ein hellgraues Feld und zwei weiße Felder. In der dritten Zeile ist es genau umgekehrt, es gibt ein weißes Feld und zwei hellgraue Felder. Addieren wir alle 6 Zahlen in diesen zwei Zeilen, so erhalten wir das 3-fache der Summe der beiden Zahlen, die in ein weißes und in ein hellgraues Feld gehören. Diese Summe ist $34 + 26 = 60$. Dann ist die Summe der Zahlen, die in ein weißes und in ein hellgraues Feld gehören, $60 : 3 = 20$. In das dunkelgraue Feld gehört folglich $32 - 20 = 12$. (**D**) ist richtig.
Aus der oberen Zeile erhalten wir, welche Zahl in ein weißes Feld gehört: $34 - 20 = 14$. Aus der unteren Zeile erhalten wir, welche Zahl in ein hellgraues Feld gehört: $26 - 20 = 6$. Die Figur lässt sich also eindeutig ausfüllen, siehe Bild rechts.




Hier ist noch eine zweite Lösungsmöglichkeit: Wir vergleichen die obere und die untere Zeile. Beide haben nur hellgraue und weiße Felder. Der Unterschied ist, dass in der oberen Zeile neben einem weißen und einem hellgrauen Feld das dritte Feld weiß ist, während in der unteren Zeile neben einem weißen und einem hellgrauen Feld das dritte Feld hellgrau ist. Die Differenz der Summen 34 und 26 muss an diesem Unterschied liegen. Die Zahl, die in ein hellgraues Feld gehört, ist also um $34 - 26 = 8$ kleiner als die Zahl, die in ein weißes Feld gehört. Würden wir nun in der unteren Zeile anstatt des weißen Feldes ein hellgraues einsetzen, würde die Summe 26 um 8 kleiner werden: $26 - 8 = 18$. Da wir nun 3 hellgraue Felder hätten, gehört in ein hellgraues Feld folglich $18 : 3 = 6$. Dann gehört in ein weißes Feld die um 8 größere Zahl $6 + 8 = 14$. Zuletzt können wir die gesuchte Zahl bestimmen, die in das dunkelgraue Feld gehört: $32 - 6 - 14 = 12$.

## Tiere gesucht

Nicht jedes Tier ist so mathebegeistert wie das Känguru, aber dafür tragen einige in ihrem Namen einen mathematischen Begriff.

Welche 12 Tiere sind gesucht? Verbinde jedes Wortteil links mit dem richtigen Wortteil rechts.

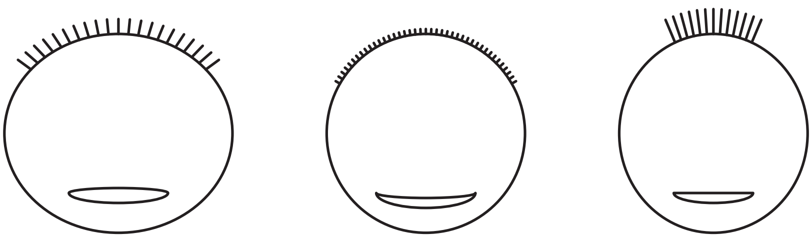
| | |
|---|---|
| Sieben | fisch |
| Spitz | qualle |
| Kreuz | auge |
| Hundert | robbe |
| Mantel | muschel |
| Dreieck | maus |
| Würfel | wasserbock |
| Neun | schläfer |
| Kugel | eule |
| Ellipsen | spinne |
| Kegel | möwe |
| Gamma | füßler |

## Marsianer-Logik

Alle Marsianer haben mindestens ein Auge, ein Ohr und eine Nase. Über die drei berühmten Marsianer Xathos, Yorthos und Zaramis ist zudem Folgendes bekannt:

1. Xathos, Yorthos und Zaramis haben insgesamt 9 Augen, 8 Ohren und 7 Nasen.
2. Zaramis hat weniger Nasen als Xathos und weniger Nasen als Yorthos.
3. Alle drei haben dieselbe Anzahl an Augen.
4. Xathos und Yorthos haben zusammen genauso viele Ohren wie Zaramis.
5. Xathos hat ein Ohr mehr als er Nasen hat.

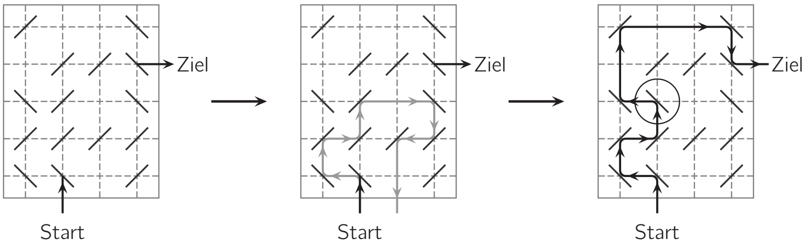
Wer kann Xathos, Yorthos und Zaramis die richtige Anzahl Augen, Ohren und Nasen einzeichnen?



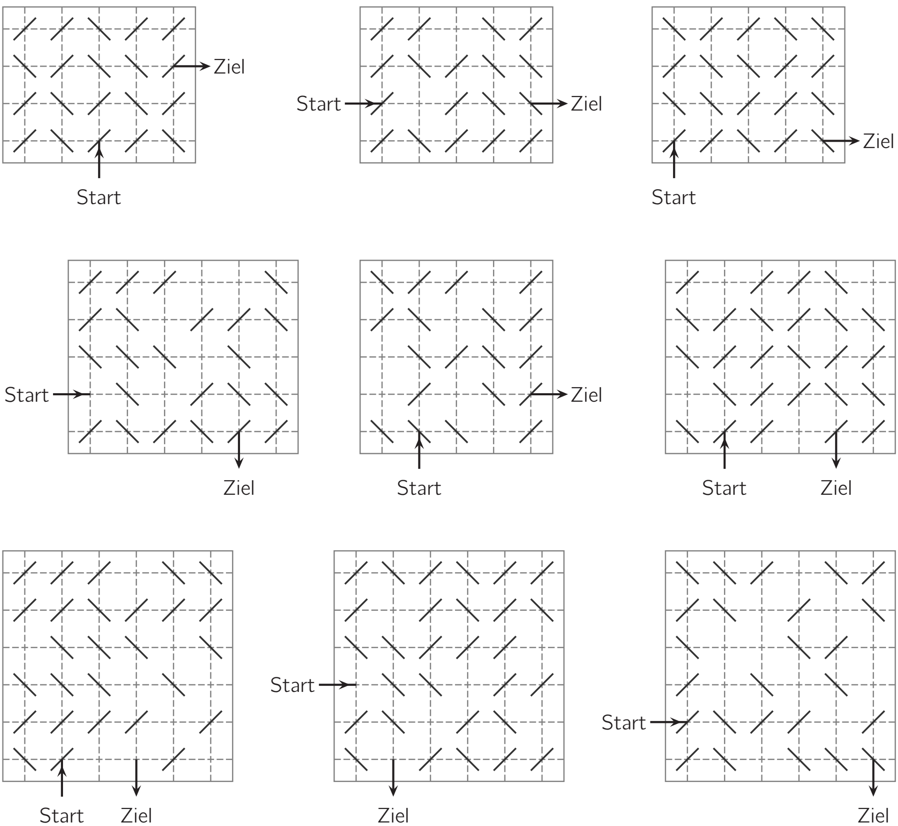
Xathos Yorthos Zaramis

## Laser-Labyrinth

Ein Laserstrahl wird an Spiegeln abgelenkt wie im Beispiel. Die Wände, auf die er trifft, haben auf beiden Seiten einen Spiegel. In jedem Labyrinth muss genau eine Wand gedreht werden, damit ein Laserstrahl, der bei „Start“ beginnt, am „Ziel“ ankommt.




Wer findet in jedem Labyrinth die eine Wand, die gedreht werden muss?



# Bunte Ringe aus Vielecken

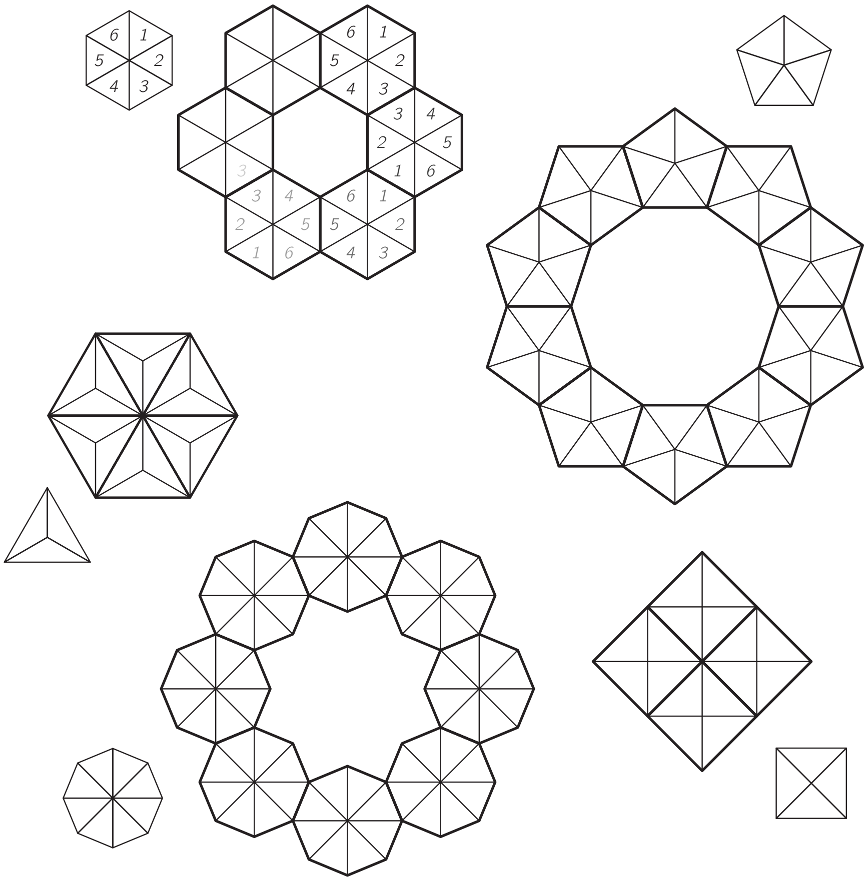
*von Heinz Klaus Strick (Leverkusen)*
*nach einer Idee aus dem Känguru-Wettbewerb 2020*

Werden regelmäßige Vielecke aneinandergesetzt, entstehen Ringe. Einige solche Ringe sind abgebildet. In jedem Ring sollen die einzelnen Felder mit verschiedenen Farben ausgemalt werden. Dabei gilt:

- Alle Vielecke in einem Ring sollen gleich gefärbt sein, die Vielecke sind jeweils nur gedreht.
- Benachbarte Vielecke sollen mit Feldern derselben Farbe aneinanderstoßen.

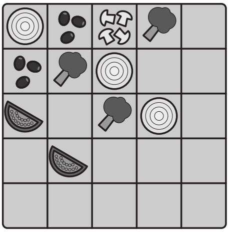
Im ersten Ring mit den Sechsecken sind als Hilfe Zahlen für gleichfarbige Felder eingetragen.

Wer kann alle Ringe gemäß der Regeln ausmalen?




*Auf seiner Webseite*
`mathematik-ist-schoen.de`
*bietet Heinz Klaus Strick noch mehr bunte und schöne Mathematik an.*

# Schneiden und belegen: Sechs Pizza-Rätsel

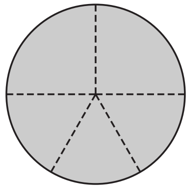


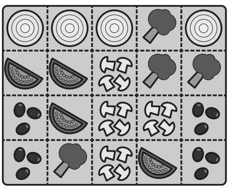
**1** Nora bäckt ein großes Blech Pizza. Wenn sie fertig ist, will sie die Pizza in 25 gleich große quadratische Stücke schneiden. Jedes Stück belegt sie mit genau einer Zutat: Zwiebel, Oliven, Pilze, Brokkoli oder Tomate. In jeder waagerechten Reihe und in jeder senkrechten Reihe soll jeder Belag genau einmal vorkommen.

Links ist zu sehen, wie Nora die ersten Stücke belegt hat.
Wie muss Nora die restlichen Stücke belegen?

**2** Anna hat sich an ihrem Geburtstag eine riesige runde Pizza aus ihrer Lieblingspizzeria gewünscht. Sie teilt mit ihren Eltern und ihren zwei Brüdern. Annas Eltern sollen jeweils ein Viertel der Pizza bekommen. Anna und ihre zwei Brüder sollen vom Rest jeweils ein Drittel bekommen.
Die Pizza soll schon in der Pizzeria fertig in Stücke geschnitten werden. Als sie am Telefon bestellen, erfahren sie: Die Pizza kann zwar in beliebig viele Stücke geschnitten werden, aber nur so, dass alle Stücke gleich groß sind.

Wie muss die Pizza geschnitten werden, damit sie ohne weiteres Schneiden unter den fünf Familienmitgliedern wie gewünscht aufgeteilt werden kann?

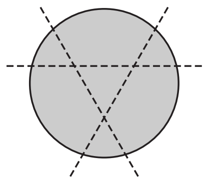




**3** Die abgebildete Pizza soll entlang der gestrichelten Linien in zwei Teile geschnitten werden. Die beiden Teile sollen dieselbe Form haben und jeden Belag (Zwiebel, Oliven, Pilze, Brokkoli, Tomate) genau 2-mal enthalten.

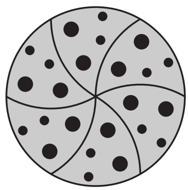
Wie muss die Pizza geschnitten werden?

**4** Schneewittchen bäckt für die 7 Zwerge eine große Pizza, die sie wie abgebildet in 7 Stücke zerschneiden will. Sie will die Pizza mit 28 Oliven so belegen, dass es jeweils ein Stück mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 Oliven gibt. Der kleinste Zwerg wünscht sich, dass außerdem Folgendes erfüllt ist:
Egal, welchen der 3 Schnitte Schneewittchen als erstes macht, es liegen nach diesem Schnitt auf beiden Teilen gleich viele Oliven.



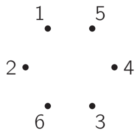
Wie könnte Schneewittchen die 28 Oliven auf der Pizza verteilen? Wer findet mehrere Möglichkeiten?

**5** Die Pizza, die links abgebildet ist, soll in 3 Stücke geschnitten werden, die alle dieselbe Form haben. Außerdem soll jedes dieser Stücke mit 3 feurigen Chili-Schoten belegt sein. Wie könnte die Pizza geschnitten werden? (*Hinweis*: Die Schnitte müssen nicht gerade sein.)

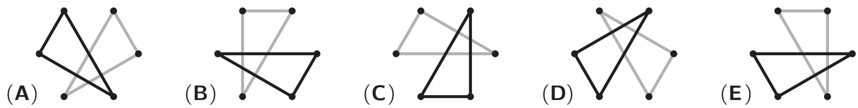


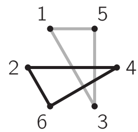
**6** Ludwig hat die Salami-Pizza, die rechts abgebildet ist, in 6 völlig gleiche Stücke geschnitten. Sie haben dieselbe Form und sind gleich belegt. Es sollten aber eigentlich 12 völlig gleiche Stücke werden. Wie muss Ludwig die einzelnen Stücke weiter zerschneiden, damit es 12 völlig gleiche Stücke sind?

## Klassenstufen 5 und 6



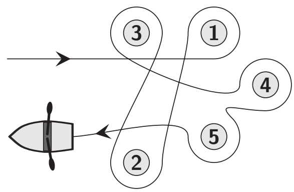

**1.** Kim verbindet im Bild rechts alle Punkte, an denen ungerade Zahlen stehen. Franzi verbindet alle Punkte, an denen gerade Zahlen stehen. So entstehen zwei Dreiecke. Welches Bild zeigt diese zwei Dreiecke?



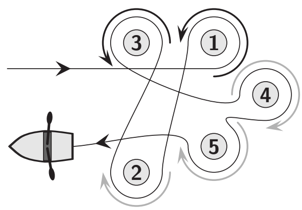




*Lösung:* Nur im Bild (**E**) sind die Punkte mit den ungeraden Zahlen 1, 3 und 5 und die Punkte mit den geraden Zahlen 2, 4 und 6 verbunden. Das ist das gesuchte Bild von Kim und Franzi.

**2.** Eileen hat mit dem Ruderboot fünf Bojen umrundet. Welche Bojen umrundete sie <u>gegen</u> den Uhrzeigersinn?




(**A**) 1 und 4 (**B**) 2, 3 und 5 (**C**) 2 und 3
(**D**) 1, 4 und 5 (**E**) 1 und 3




*Lösung:* Um die Bojen 1 und 3 ruderte Eileen <u>gegen</u> den Uhrzeigersinn, die anderen umfuhr sie im Uhrzeigersinn, siehe Bild rechts. (**E**) ist die Lösung.

— *Ähnlich war in Klassenstufe 7/8 die Aufgabe 2.* —

**3.** Bei welcher der fünf Rechnungen ist das Ergebnis am größten?

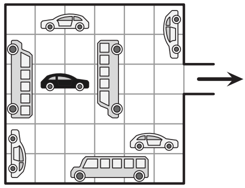
(**A**) $20 + 22$ (**B**) $202 + 2$ (**C**) $202 : 2$ (**D**) $20 \cdot 22$ (**E**) $202 \cdot 2$

*Lösung:* Wir rechnen die fünf Ergebnisse aus: $20 + 22 = 42$; $202 + 2 = 204$; $202 : 2 = 101$; $20 \cdot 22 = 440$ und $202 \cdot 2 = 404$. Das größte Ergebnis ist 440, (**D**) ist also die Lösung.

**4.** Georgs Urgroßvater wird 95. Für die Geburtstagsfeier soll Georg genau 95 Luftballons kaufen. Die gibt es in Päckchen zu 5, zu 10 und zu 25 Stück. Wie viele Päckchen muss Georg mindestens nehmen?

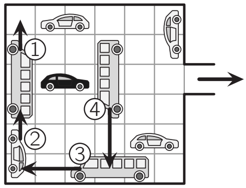
(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 10

*Lösung:* Zuerst stellen wir fest, dass 3 Päckchen nicht ausreichen. Selbst wenn wir 3 Päckchen mit je 25 Luftballons kaufen, sind das zusammen nur 75 Stück, also zu wenige. Beim Kauf von 4 Päckchen zu je 25 Stück, hätten wir 100 Stück, und das sind zu viele Luftballons. Georg sollte genau 95 Stück kaufen. Wenn Georg zu den drei 25er-Päckchen zwei 10er-Päckchen dazunimmt, sind es genau 95 Luftballons. Die gesuchte kleinste Anzahl an Päckchen, die Georg zu kaufen hat, ist 5.



**5.** Die Fahrzeuge auf dem Parkplatz dürfen nur geradeaus fahren. Wie viele der grauen Fahrzeuge müssen fahren, damit das schwarze Auto danach den Parkplatz verlassen kann?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6



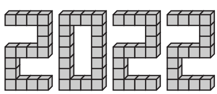

*Lösung:* Das Bild zeigt, dass 4 Fahrzeuge bewegt werden müssen, damit danach das schwarze Auto den Parkplatz verlassen kann, so wie in (**C**) angegeben.

**6.** Auf dem Tisch liegen sieben Karten: $\boxed{4}$ $\boxed{69}$ $\boxed{113}$ $\boxed{8}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$ Bruno legt damit die kleinstmögliche 12-stellige Zahl. Welches sind die letzten drei Ziffern dieser Zahl?

(**A**) 698 (**B**) 113 (**C**) 551 (**D**) 869 (**E**) 458

*Lösung:* Um die kleinstmögliche Zahl zu erhalten, muss sie mit der kleinstmöglichen Ziffer beginnen. Also muss Bruno $\boxed{113}$ als erstes legen. Als nächstes folgt $\boxed{4}$. Die nächsten beiden Karten sind $\boxed{51}$ und $\boxed{5}$. Diese müssen genau in dieser Reihenfolge liegen, da $\boxed{51}\boxed{5}$ kleiner ist als $\boxed{5}\boxed{51}$. Die letzten drei Karten sind in dieser Reihenfolge $\boxed{67}\boxed{69}\boxed{8}$. Die gesuchten letzten drei Ziffern sind 698.

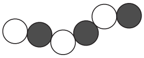
*— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 3 zu lösen. —*

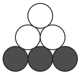
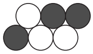
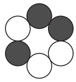
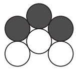
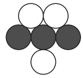


**7.** Aus 66 Würfeln baut Masoud die Zahl 2022. Dazu bestreicht er stets beide Flächen, die er zusammenklebt, mit Klebstoff. Einige Würfel haben zwei mit Klebstoff bestrichene Seiten, einige nur eine. Bei wie vielen Würfeln sind es zwei Seitenflächen?

(**A**) 16 (**B**) 30 (**C**) 46 (**D**) 54 (**E**) 60

*Lösung:* Von den 66 Würfeln sind nur die 6 Endwürfel an den großen Zweien mit nur einer Seite angeklebt. Alle anderen Würfel haben zwei mit Klebstoff bestrichene Seitenflächen. Von dieser Sorte gibt es $66 - 6 = 60$, also ist (**E**) richtig.

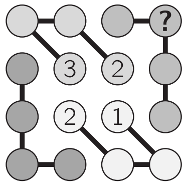
**8.** Eine Raupe  hat sich zum Schlafen zusammengefaltet. Wie könnte das aussehen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 


*Lösung:* Jede weiße Kugel der Raupe ist zu mindestens einer schwarzen benachbart. Das ist bei (**A**) nicht der Fall. Dies kann also nicht die gesuchte Schlafposition sein. Von den weißen Kugeln haben zwei mit zwei schwarzen Kugeln Kontakt. Da das bei (**C**) und (**D**) nicht der Fall ist, kommen diese beiden Stellungen ebenfalls nicht in Frage. (**E**) ist nicht möglich, weil es stets zwei schwarze Kugeln geben muss, die jede mit zwei weißen Kugeln Kontakt haben, was hier nicht der Fall ist. (**B**) ist möglich, wie das Bild zeigt.

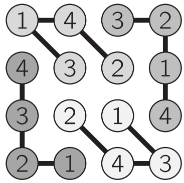
*— Eine ähnliche Aufgabe war Aufgabe 16 in Klassenstufe 3/4. —*

**9.** Lennart möchte die Figur rechts fertigstellen. In jeder Vierergruppe aus miteinander verbundenen Kreisen und ebenso in jeder Spalte und in jeder Zeile sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 jede genau einmal stehen. Welche Zahl gehört in den Kreis mit dem Fragezeichen?



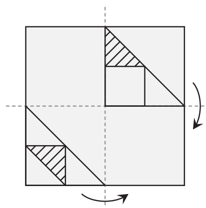

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) Das ist nicht möglich.

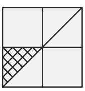
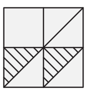
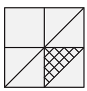
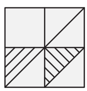
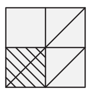
*Lösung:* Wir beginnen mit der links oben befindlichen Vierergruppe, in der 3 und 2 bereits eingetragen sind – es fehlen 1 und 4, die also beide in den beiden linken Feldern der obersten Zeile stehen. In den beiden rechten Feldern dieser Zeile müssen 2 und 3 stehen, und da in der 3. Spalte bereits eine 2 steht, gehört die 2 in die rechte obere Ecke in den Kreis mit dem Fragezeichen. Die Figur lässt sich auf eindeutige Weise vervollständigen, wie rechts zu sehen ist. (**B**) ist die Lösung.



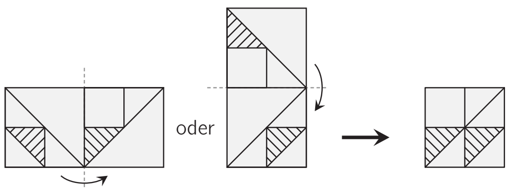

> *Wer kann aus neun verschiedenen Ziffern drei 3-stellige Zahlen bilden, deren Summe die Jahreszahl 2022 ist?*

**10.** Auf transparentem Papier sind zwei Figuren gezeichnet. Es wird wie im Bild zweimal gefaltet. Wie sieht das gefaltete Papier nun aus?



 (**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**)

*Lösung:* Wir zeigen, was nach dem Umklappen der oberen Hälfte und was nach dem Umklappen der linken Hälfte zu sehen ist. Egal in welcher Reihenfolge gefaltet wird, das Ergebnis nach der zweiten Faltung ist in jedem Fall das, was bei (**B**) zu sehen ist.



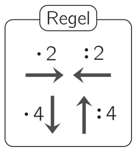

nach der ersten Faltung nach der zweiten Faltung

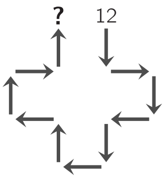
**11.** Juri zerbricht einen langen dünnen Stock in 3 Teile. Dann zerbricht er immer wieder das jeweils längste Stöckchen in 3 Teile. Welche Anzahl von Stöckchen kann er so nicht erhalten?

(**A**) 13 (**B**) 17 (**C**) 20 (**D**) 23 (**E**) 25

*Lösung:* Wenn Juri den Stock oder das größte der verbleibenden Stöckchen zerbricht, ersetzt er jedes Mal ein Teil durch drei (kleinere) Teile. Die Gesamtzahl wächst also um 2. Da mit 1 begonnen wird, ist jede während des Zerbrechens entstehende Anzahl also eine ungerade Zahl. Das trifft auf vier der fünf Antworten zu. Die gesuchte „unmögliche“ Anzahl ist 20.

**12.** Clara hat eine Rechenanweisung gefunden. Die Pfeile geben an, wie zu rechnen ist. Clara probiert die Regel aus. Sie beginnt mit der 12, denn am 12. April hat sie Geburtstag. Welche Zahl erhält sie als Ergebnis?



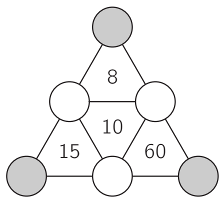

(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 16 (**D**) 24 (**E**) 48

*Lösung:* Da in Claras Rechenanweisung nur die Rechenoperationen Multiplikation und Division vorkommen, darf ihre Reihenfolge vertauscht werden. Es lassen sich zwei Pfeilpaare unterscheiden:

- Die senkrechten Pfeile bedeuten in der einen Richtung die Multiplikation mit 4, in der anderen Richtung die Division durch 4. Die Anzahl der nach unten und der nach oben weisenden Pfeile bei Claras Aufgabe ist beide Male 3. Also heben sich diese Rechnungen gegeneinander auf.
- Die waagerechten Pfeile bedeuten in der einen Richtung die Multiplikation mit 2, in der entgegengesetzten die Division durch 2. Hier gibt es 2 Pfeile, die eine Multiplikation verlangen und 3 Pfeile, die eine Division verlangen. Je 2 dieser Rechnungen heben sich gegeneinander auf, und es bleibt eine Division durch 2.

Das Ergebnis ist entsprechend der Regel $12 : 2 = 6$.
Es kann natürlich auch Schritt für Schritt gerechnet werden. Das birgt aber die Gefahr, sich zu verrechnen. Einfacher ist es, sich die Struktur genauer anzuschauen. Das ist auch weniger aufwändig.

**13.** In die sechs Kreise sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 eingetragen werden. Dabei soll in jedem der vier kleinen Dreiecke die Zahl in der Mitte gleich dem Produkt der Zahlen in den drei Eckpunkten sein. Was ist dann die Summe der Zahlen in den drei grauen Kreisen?

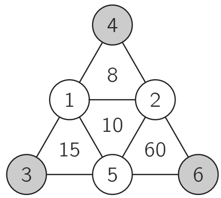



(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 13 (**E**) 16

*Lösung:* Da in den Dreiecken die Produkte der Zahlen an den Ecken stehen, ist es hilfreich, die vier gegebenen Zahlen in Faktoren zu zerlegen:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 4 \qquad 10 = 2 \cdot 5 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 6 \cdot 5$$

Hinzu kann jeweils noch der Faktor 1 kommen. Wir erkennen, dass genau in den drei Zahlen 10, 15 und 60 der Faktor 5 steckt. Damit muss die 5 in einen Kreis eingetragen werden, der zu diesen drei Zahlen gehört, also in den weißen Kreis unten in der Mitte. Für die Zahlen in den beiden anderen weißen Kreisen bleiben wegen $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$ nur die 1 und die 2. In die grauen Kreise gehören somit die Zahlen 3, 4 und 6. Die gesuchte Summe ist $3 + 4 + 6 = 13$.
Die Figur kann auf eindeutige Weise ausgefüllt werden, siehe Bild rechts.

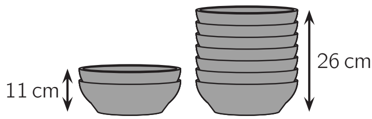


**14.** Die Jahreszahl 2022 hat die besondere Eigenschaft, dass eine Ziffer darin 3-mal auftaucht. Unsere 50-jährige Schildkröte Rosi hat schon mehrmals Jahre erlebt, in denen eine Ziffer 3-mal vorkommt. Wie oft hat sie das vor 2022 erlebt?

(**A**) 2-mal (**B**) 3-mal (**C**) 4-mal (**D**) 5-mal (**E**) 6-mal

*Lösung:* Wir müssen den Bereich von 2021 bis $2022 - 50 = 1972$ betrachten. Die Jahreszahlen in diesem Bereich beginnen mit 19 oder 20. Da eine Ziffer 3-mal vorkommen soll, kommen nur 1911, 1999, 2000 und 2022 in Frage. Davon hat Rosi zwischen 1972 und 2021 nur die Jahre 1999 und 2000 erlebt. Die richtige Antwort ist (**A**).

**15.** Einige Schüsseln sind hoch aufgestapelt. Der Stapel aus 2 Schüsseln ist 11 cm hoch, und der Stapel aus 7 Schüsseln ist 26 cm hoch. Wie hoch ist ein Stapel aus 5 solchen Schüsseln?




(**A**) 17 cm (**B**) 19 cm (**C**) 20 cm
(**D**) 21 cm (**E**) 22 cm

*Lösung:* Der rechte Stapel aus 7 Schüsseln entsteht, indem wir auf den linken Stapel aus 2 dieser Schüsseln 5 zusätzliche Schüsseln stapeln. Da der Stapel aus 7 Schüsseln um $26\,\text{cm} - 11\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$ höher ist als der Stapel aus 2 Schüsseln, ragt jede der oberen Schüsseln $15\,\text{cm} : 5 = 3\,\text{cm}$ aus der Schüssel direkt darunter heraus. Ein Stapel aus 5 solchen Schüsseln ist also $11\,\text{cm} + 3 \cdot 3\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$ hoch.

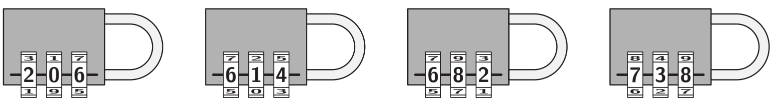
*— In Klassenstufe 7/8 gab es in Aufgabe 11 eine ähnliche Fragestellung. —*

**16.** Frau Wolf geht oft mit den vier Hunden ihrer Nachbarn spazieren. Neulich wurden die Hunde gewogen, und nun ist klar: Das Gewicht jedes Hundes in kg ist eine ganze Zahl. Kein Hund wiegt dasselbe wie ein anderer. Alle vier zusammen wiegen 30 kg. Ajax ist der zweitschwerste und wiegt 13 kg. Wie viel wiegt Elvis, der drittschwerste?

(**A**) 2 kg (**B**) 3 kg (**C**) 5 kg (**D**) 7 kg (**E**) 8 kg

*Lösung:* Da der zweitschwerste Hund Ajax 13 kg wiegt und da das Gewicht jedes Hundes eine ganze Zahl ist, wiegt der schwerste Hund mindestens 14 kg. Der schwerste Hund und Ajax wiegen demnach zusammen mindestens $13\,\text{kg} + 14\,\text{kg} = 27\,\text{kg}$. Folglich wiegen Elvis und der leichteste Hund zusammen höchstens $30\,\text{kg} - 27\,\text{kg} = 3\,\text{kg}$. Weil nur natürliche Zahlen vorkommen, muss Elvis, nach dem gefragt ist, 2 kg wiegen, wie es bei (**A**) steht, und sein noch leichterer Nachbarshund 1 kg. Elvis könnte etwa ein kleiner Yorkshire Terrier sein und der noch leichtere Hund ein Chihuahua.

**17.** Um das Schloss zu öffnen, bekommt Janosch vier hilfreiche Tipps:




Genau zwei dieser Ziffern sind korrekt, aber beide sind am falschen Platz.

Genau eine dieser Ziffern ist korrekt, aber sie ist am falschen Platz.

Genau eine dieser Ziffern ist korrekt, und sie ist am richtigen Platz.

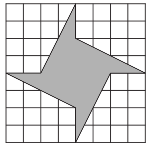
Alle drei Ziffern sind falsch.

Mit welchem Code kann Janosch das Schloss öffnen?

(**A**) 604 (**B**) 082 (**C**) 640 (**D**) 042 (**E**) 046

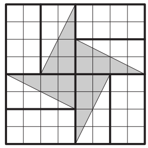
*Lösung:* Günstig ist es, mit dem 4. Tipp zu beginnen: die Ziffern 3, 7 und 8 kommen nicht vor. Damit wissen wir aus dem 3. Tipp, dass entweder die 2 oder die 6 vorkommt und auch am richtigen Platz ist. Im 2. Tipp steht die 6 am selben Platz wie im 3. Tipp, aber die eine richtige Ziffer in 2. Tipp ist am falschen Platz. Also ist die 2 die korrekte Zahl im 3. Tipp und steht ganz rechts im Code. Der 1. Tipp liefert nun die 0 als korrekte Ziffer. Da sie am falschen Platz steht und auch der rechte Platz schon von der 2 belegt ist, gehört sie im Code nach links. Schließlich kann in der Mitte des Codes, passend zum 2. Tipp, nur die 4 stehen. Mit 042 kann Janosch das Schloss öffnen.

**18.** Ein Quadrat ist aus 64 gleich großen quadratischen Kästchen zusammengesetzt. Ein Teil des Quadrats ist grau bemalt. Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?



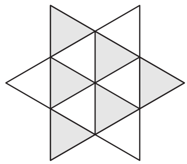
(**A**) 14 Kästchen (**B**) 16 Kästchen (**C**) 18 Kästchen
(**D**) 20 Kästchen (**E**) 22 Kästchen

*Lösung:* Wir vervollständigen das Gitter und teilen es in acht Rechtecke, die 2 Kästchen breit und 4 Kästchen lang sind, siehe Bild. Jedes dieser Rechtecke hat einen Flächeninhalt von 8 Kästchen. Wir erkennen, dass die vier langen Seiten des grauen Achtecks Diagonalen in diesen Rechtecken sind. Im Rechteck halbieren die Diagonalen die Fläche, der graue Anteil ist in diesen Rechtecken demnach 4 Kästchen groß. Insgesamt ist die graue Fläche $4 \cdot 4 = 16$ Kästchen groß.

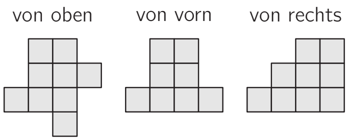


*— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 7 zu lösen. —*

*Die Zahlen von 1 bis 12 sollen so in die 12 kleinen Dreiecke eingetragen werden, dass in jedem der mittelgroßen Dreiecke, die sich aus vier kleinen Dreiecken zusammensetzen, die Summe der vier Zahlen 20 ist. Wer findet mehrere Möglichkeiten?*

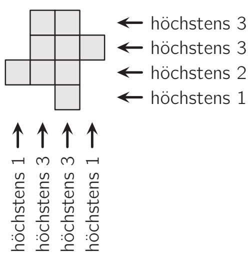


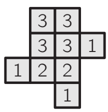
**19.** Die drei Abbildungen zeigen einen aus gleich großen Würfeln gebauten Körper von oben, von vorn und von rechts. Aus wie vielen Würfeln kann dieser Körper höchstens bestehen?




(**A**) 18 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 21 (**E**) 22

*Lösung:* Die Grundfläche des gebauten Körpers sieht so aus, wie es die Ansicht von oben zeigt. Für jede Zeile schreiben wir daneben aus der Ansicht von rechts, wie viele Würfel in dieser Zeile höchstens übereinander liegen können. Für jede Spalte schreiben wir darunter aus der Ansicht von vorn, wie viele Würfel dort höchstens übereinander liegen können. In jedes Kästchen schreiben wir nun entsprechend der Zeile und Spalte, die sich hier kreuzen, wie viele Würfel maximal auf diesem Kästchen liegen können. So ergeben sich schließlich die maximalen Höhen wie rechts unten abgebildet. Der Körper kann aus höchstens $3+3+3+3+1+1+2+2+1 = 19$ Würfeln bestehen, also ist (**B**) die Lösung.
Wer annimmt, dass die Ansicht von oben gedreht sein könnte, erhält mit denselben Überlegungen, dass in den drei anderen Fällen alle Körper aus höchstens 17 Würfeln bestehen – und damit 19 die gesuchte Anzahl ist.



**20.** Hanna möchte von den Zahlen 3, 4, 5, 6 und 7 vier Zahlen so auswählen, dass sie sie in die vier Kästchen schreiben kann und dabei eine korrekte Rechnung erhält. Sie überlegt, wie viele von den fünf Zahlen als Ergebnis der Rechnung im grauen Kästchen stehen können. Wie viele der Zahlen sind möglich?

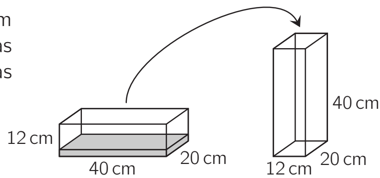
$\square + \square - \square = \blacksquare$

(**A**) nur eine (**B**) nur zwei (**C**) nur drei (**D**) nur vier (**E**) alle fünf

*Lösung:* Das Lösen wird übersichtlicher, wenn wir die Rechnung zu $\square + \square = \square + \blacksquare$ umformen und nun dafür passende Paare von Summanden finden. Möglich sind $4 + 6 = 7 + \mathbf{3}$ und $4 + 6 = 3 + \mathbf{7}$ und $3 + 7 = 6 + \mathbf{4}$ und $3 + 7 = 4 + \mathbf{6}$, und als Letztes $3 + 6 = 4 + \mathbf{5}$, wobei die fett markierte Zahl ins graue Kästchen gehört. Alle fünf Zahlen können im grauen Kästchen stehen.

> *Es gibt mehrere Möglichkeiten, die sechs Buchstaben $K$, $A$, $N$, $G$, $R$ und $O$ so durch sechs verschiedene Ziffern zu ersetzen, dass*
>
> $K \cdot A, \quad N + G, \quad A + R \quad \text{und} \quad O \cdot O$
>
> *alle dasselbe Ergebnis haben. Wie groß kann $K + G$ dabei höchstens sein?*

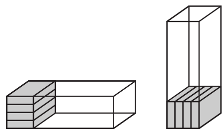
**21.** Auf dem Tisch stehen zwei quaderförmige Gefäße. In dem flachen Gefäß links steht 3 cm hoch Wasser. Es soll in das hohe Gefäß rechts umgefüllt werden. Wie hoch würde das Wasser dort stehen?



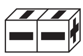

(**A**) 10 cm (**B**) 15 cm
(**C**) 18 cm (**D**) 20 cm (**E**) 24 cm

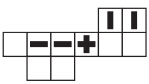
*Lösung:* Das linke Gefäß ist zu einem Viertel der Höhe mit Wasser gefüllt, da 12 cm : 3 cm = 4 ist. Da beide Gefäße dieselben Abmessungen haben, wird auch das rechte Gefäß zu einem Viertel der Höhe mit Wasser gefüllt sein, also bis zu einer Höhe von 40 cm : 4 = 10 cm.

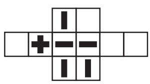
Eine andere Lösung ist folgende: Wir stellen uns vor, dass es sich in dem linken Gefäß um etwas Festes handelt. Würden wir das 40 cm lange Stück in vier 10 cm breite Streifen teilen, so hätte jeder dieser Streifen die Maße 3 cm × 20 cm × 10 cm und wir könnten die Streifen nebeneinander in das hohe Gefäß legen, so dass sie auch dort die Grundfläche bedecken. Die vier Streifen hätten dort zusammen die Maße 12 cm × 20 cm × 10 cm, würden also 10 cm hoch sein.

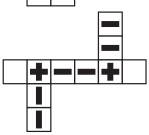


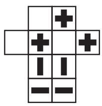
**22.** Aus welchem der Netze lässt sich der rechts abgebildete Körper sicher <u>nicht</u> bauen?

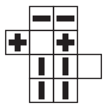



(**A**)

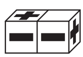

(**B**)


(**C**)


(**D**)

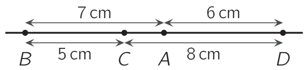

(**E**)

*Lösung:* Die Netze (**A**) bis (**D**) lassen sich zu dem abgebildeten Körper falten. Mit dem Netz (**E**) lässt sich dieser nicht bauen. Falten wir dieses Netz und legen den Körper so, dass die rechte und die vordere Seitenfläche so wie in der Ansicht des Körpers aus der Aufgabe liegen, dann sehen wir, dass die Oberseiten nicht übereinstimmen.



**23.** Auf einer Geraden befinden sich die Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$. Der Abstand zwischen $A$ und $B$ beträgt 7 cm, der Abstand zwischen $B$ und $C$ beträgt 5 cm, die Punkte $C$ und $D$ sind 8 cm voneinander entfernt, und $D$ und $A$ sind 6 cm voneinander entfernt. Welche der vier Punkte $A$, $B$, $C$ und $D$ sind am weitesten voneinander entfernt?

(**A**) $A$ und $B$ (**B**) $A$ und $C$ (**C**) $B$ und $D$ (**D**) $C$ und $D$ (**E**) $A$ und $D$




*Lösung:* Wir bestimmen die Reihenfolge der Punkte auf der Geraden. Wir beginnen dafür mit $B$ und $C$, weil sie die geringste Entfernung voneinander haben und alle anderen Punkte links oder rechts von der Strecke $\overline{BC}$ liegen müssen. $B$ und $C$ liegen 5 cm voneinander entfernt auf der gemeinsamen Geraden der vier Punkte. Der Punkt $A$ kann nicht auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ über $B$ hinaus liegen, weil dann – je nachdem, ob $D$ links oder rechts von $A$ liegt – wegen $|AD| = 6\,\text{cm}$ der Abstand $|DC| = 18\,\text{cm}$ oder $|DC| = 6\,\text{cm}$ wäre. Also liegt $A$ auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ über $C$ hinaus. Der Punkt $D$, da er nicht zwischen $B$ und $C$ liegt, muss auf der Verlängerung von $\overline{CA}$ über $A$ hinaus liegen. Dann sind alle Abstände in Ordnung, und $B$ und $D$ sind die am weitesten voneinander entfernten Punkte.

*— Ein Problem, das ähnlich gelöst werden kann, war in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 19 gestellt. —*

**24.** Dreißig fantastische Geschöpfe, Ja-Schöpfe und Naja-Schöpfe, sitzen rund um einen runden Tisch herum. Die Ja-Schöpfe sprechen stets die Wahrheit. Die Naja-Schöpfe sprechen mal die Wahrheit, mal lügen sie, wie es ihnen gerade passt. Jedes Geschöpf wird zu seinen Sitznachbarn befragt, und jedes Geschöpf sagt: „Mindestens eines meiner beiden Nachbargeschöpfe ist ein Naja-Schöpf." Welches ist die größtmögliche Anzahl von Ja-Schöpfen, die am Tisch sitzen könnten?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 15 (**D**) 20 (**E**) 25

*Lösung:* Es könnte sein, dass nur Naja-Schöpfe am Tisch sitzen. Wir wollen jedoch wissen, wie viele Ja-Schöpfe dort höchstens sitzen können. Neben jedem Ja-Schöpf sitzt mindestens ein Naja-Schöpf. Wählen wir also eine beliebige nebeneinander sitzende Dreiergruppe, dann kann es in dieser höchstens zwei Ja-Schöpfe geben. Folglich kann die Anzahl der Ja-Schöpfe, da sich die Geschöpfe in 10 Dreiergruppen aufteilen lassen, höchstens 20 sein. Und es gibt auch tatsächlich eine Sitzordnung der Geschöpfe, bei der genau 20 Ja-Schöpfe und 10 Naja-Schöpfe am Tisch sitzen, nämlich wenn stets auf zwei Ja-Schöpfe ein Naja-Schöpf folgt.

## Über magische Quadrate *von Heinz Klaus Strick (Leverkusen)*

In einem magischen Quadrat sind je nach Größe die Zahlen von 1 bis 9, von 1 bis 16, von 1 bis 25 usw. eingetragen. In jeder Zeile und in jeder Spalte und auch in den beiden Diagonalen haben die Zahlen dieselbe Summe, die „magische Summe". Rechts ist ein magisches $3 \times 3$-Quadrat abgebildet. *Ist es wirklich eins? Was ist die magische Summe?*

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

Kleine magische Quadrate, also $3 \times 3$-Quadrate oder $4 \times 4$-Quadrate, lassen sich durch geschicktes Probieren, Überlegen und mit etwas Geduld finden. Bei größeren Quadraten wird es schon schwieriger. Der bekannte britische Mathematiker John Conway (1937–2020) entdeckte eine Methode, wie man ein magisches $6 \times 6$-Quadrat aus einem magischen $3 \times 3$-Quadrat herstellen kann. Diese Methode ist rechts an einem Beispiel dargestellt.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 29 | 4 | 1 | 24 | 21 |
| 30 | 31 | 2 | 3 | 22 | 23 |
| 12 | 9 | 17 | 20 | 28 | 25 |
| 10 | 11 | 18 | 19 | 26 | 27 |
| 13 | 16 | 36 | 33 | 5 | 8 |
| 14 | 15 | 34 | 35 | 6 | 7 |

*Dass manche Felder weiß und andere hellgrau sind, hat eine Bedeutung. Findest du heraus, welche?*

*Stelle nun aus dem magischen $3 \times 3$-Quadrat, das oben rechts abgebildet ist, ein magisches $6 \times 6$-Quadrat her.*
*Richtig vermutet oder nicht? Überprüfe, dass das $6 \times 6$-Quadrat wirklich ein magisches Quadrat ist.*

*Zum Nachdenken: Warum funktioniert diese Methode?*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Diese Methode lässt sich verallgemeinern. Hier ist zu sehen, wie ein magisches $10 \times 10$-Quadrat aus einem magischen $5 \times 5$-Quadrat hergestellt werden kann:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 |
| 23 | 6 | 19 | 2 | 15 |

→

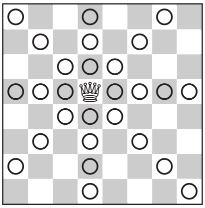
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 41 | | | | | | | | |
| 42 | 43 | | | | | | | | |
| 16 | 13 | | | | | | | | |
| 14 | 15 | | | | | | | | |
| 68 | 65 | | | | | | | | |
| 66 | 67 | | | | | | | | |
| 37 | 40 | | | | | | | | |
| 38 | 39 | | | | | | | | |
| 89 | 92 | | | | | | | | |
| 91 | 90 | | | | | | | | |

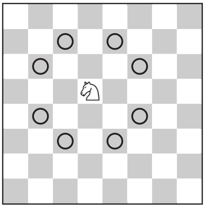
*Wie müssen die übrigen Felder ausgefüllt werden? Welche Bedeutung haben die dunkelgrauen Felder?*

*Richtig vermutet oder nicht? Überprüfe, dass das $10 \times 10$-Quadrat wirklich ein magisches Quadrat ist.*

*Auf seiner Webseite*
`mathematik-ist-schoen.de`
*bietet Heinz Klaus Strick noch mehr magische und schöne Mathematik an.*

## Knobeleien rund um das Schachbrett





Beim Schach gibt es 6 verschiedene Figuren jeweils in weiß und in schwarz:

| | | |
|---|---|---|
| König ♔ ♚ | Dame ♕ ♛ | Turm ♖ ♜ |
| Läufer ♗ ♝ | Springer ♘ ♞ | Bauer ♙ ♟ |

Jede der Figuren darf nur auf eine bestimmte Weise auf dem Schachbrett bewegt werden. Für diese Knobeleien, die sich rund um das Schachbrett drehen, ist es nur notwendig zu wissen, wie sich die Dame und der Springer bewegen können (siehe auch die Bilder links):

Die Dame kann beliebig weit senkrecht, waagerecht und diagonal ziehen.

Der Springer kann entweder 2 Felder senkrecht und dann 1 Feld waagerecht oder 2 Felder waagerecht und dann 1 Feld senkrecht ziehen.

♝ Der Schachklub der Regenbogenschule startet ein Turnier. Die erste Runde findet in der ersten Ferienwoche im Frühling statt. Jedes Mitglied des Klubs spielt gegen jedes andere Mitglied, und zwar einmal mit den weißen und einmal mit den schwarzen Figuren. Insgesamt finden 132 Spiele statt. Wie viele Mitglieder hat der Schachklub der Regenbogenschule?

♔ Auf einem Schachbrett gibt es insgesamt 64 quadratische Felder. Wie viele größere Quadrate gibt es auf dem Schachbrett, die aus mehreren Feldern bestehen?

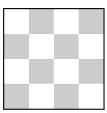
♟ Wie viele Züge benötigt ein Springer mindestens, um von der unteren linken Ecke zur unteren rechten Ecke zu gelangen? Und wie viele Züge benötigt er mindestens, um von der unteren linken Ecke zur oberen rechten Ecke zu gelangen?

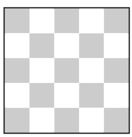
♘ Es ist möglich, 4 Springer so auf einem Schachbrett zu platzieren, dass 28 der freien Felder von einem (oder mehreren) der Springer in einem Zug erreicht werden können. Wer findet eine Lösung?

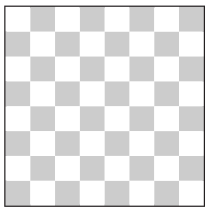
♜ Es ist möglich, 5 Damen so auf dem Schachbrett zu platzieren, dass jedes freie Feld von einer (oder mehreren) der Damen in einem Zug erreicht werden kann. Wer findet eine Lösung?

♕ Es ist auch möglich, 8 Damen so auf dem Schachbrett zu platzieren, dass keine von ihnen eine der anderen schlagen kann. Das ist ein bekanntes und recht schwieriges Problem, obwohl es eine Vielzahl an Lösungen gibt. Wer findet eine solche Anordnung?

♞ Ein Springer wird auf ein beliebiges Feld eines kleinen $4 \times 4$-Schachbretts gestellt. Kann der Springer so bewegt werden, dass er jedes Feld genau einmal erreicht? Wie ist das auf einem $5 \times 5$-Schachbrett? Und wie ist es auf einem gewöhnlichen $8 \times 8$-Schachbrett?







## Das $(3n + 1)$-Problem *von Ingmar Lehmann (Berlin)*

Die Hälfte einer geraden Zahl ist leicht im Kopf zu bilden; bei einer ungeraden Zahl bliebe stets der Rest 1 – man sagt deshalb auch, für ungerade Zahlen „geht die Division durch 2 nicht auf“. Wenn man die Zahlen 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... sieht, erkennt man sofort, dass es sich um die „Dreierreihe“ handelt. Das ist die Folge der Zahlen, die durch Verdreifachen aller natürlichen Zahlen entstehen: $[3n]$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Nach welcher Vorschrift aber sind die Zahlen 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... gebildet worden? Hat man zuvor die Dreierreihe betrachtet, ist es keine große Kunst, das darin verborgene „Gesetz“ zu entdecken: zu jedem Dreifachen einer Zahl wird 1 addiert; es sind also gerade die Nachfolger der Zahlen der Dreierreihe: $[3n + 1]$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Die Rechenoperationen, die im folgenden Problem mit einer natürlichen Zahl $n$ durchzuführen sind, sind ebenfalls ganz einfach. Es wird multipliziert und addiert oder aber dividiert. Im Ergebnis erhält man wieder eine natürliche Zahl. Wir bleiben bei den Grundrechenoperationen – und werden einige Überraschungen erleben.

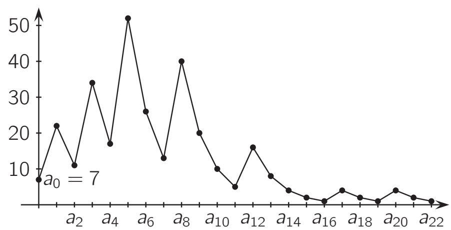
Im Jahr 1937 hat sich ein Student, der spätere deutsche Mathematiker Lothar Collatz (1910-1990), ein merkwürdiges Spiel – eine Vorschrift – ausgedacht, wie man von einer gegebenen positiven natürlichen Zahl $n$ immer aufs Neue weitere Zahlen konstruiert: **Wähle dafür eine beliebige positive natürliche Zahl $n$. Wenn $n$ ungerade ist, dann ersetze $n$ durch $3n + 1$, wenn $n$ gerade ist, dann ersetze $n$ durch $n/2$. Dann unterwirf den neuen Wert demselben Prozess und immer so weiter.**

Beispiel ($n = 5$): 5 ist ungerade, also ersetzen wir 5 durch $16 = 3 \cdot 5 + 1$. Nun testen wir, ob der neue Wert gerade oder ungerade ist, und wenden die gegebene Vorschrift erneut an: 16 ist gerade, also ersetzen wir 16 durch $8 = 16 : 2$. Jetzt müssen wir mit 8 fortfahren: 8 ist gerade, also ersetzen wir 8 durch $4 = 8 : 2$. Wenn wir immer so weitermachen, erhalten wir die Folge $[5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, \ldots]$.

Was passiert, wenn wir eine andere Startzahl wählen? Mit $n = 6$ erhalten wir z. B. die Folge $[6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, \ldots]$. **Aufgabe:** Wähle selbst eine Zahl und wende die Vorschrift an!

Wir können uns „drehen und wenden“ wie wir wollen, egal mit welcher Zahl wir auch starten, irgendwann erhalten wir die Zahl **1** und bleiben dann in der Schleife **1**, **4**, **2**, **1**, ... „hängen“ – diese Zahlen bilden also einen **Teufelskreis**! Dabei springen die sich ergebenden Zahlen in diesem Prozess scheinbar wahllos hin und her. Brian Hayes hat diese Zahlen 1984 *Hagelschlag-Zahlen* und Clifford A. Pickover *Achterbahn-Zahlen* genannt; Douglas R. Hofstadter nennt solche Zahlen 1979 **wundersame Zahlen**.

Der Prozess endet stets im Zyklus ..., **4**, **2**, **1**, **4**, ..., deshalb ist es sinnvoll abzubrechen, wenn **1** erreicht wird. Ist es nun wirklich egal, mit welcher Zahl wir starten? Ein weiterer Versuch liefert für $a_0 = 7$ nacheinander 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... Um die Sprünge besser zu veranschaulichen, tragen wir die Folge in ein Koordinatensystem ein:




Was aber ist, wenn die Ausgangszahl sehr groß ist? Für $n = 1024$ ist die Antwort noch leicht. Solange die neu gebildeten Zahlen gerade sind, können wir immer weiter halbieren, so auch hier: 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Und schon wieder sind wir im **Teufelskreis**!

Ist die Ausgangszahl aber ungerade und zudem sehr groß, kann es doch eine langwierige Rechnerei werden. Während für die Zahl $n = 17$ insgesamt 12 Schritte nötig sind, um zur Zahl 1 zu gelangen, benötigt man für $n = 18$ gleich 8 Schritte mehr (obwohl die Startzahl gerade ist), für $n = 27$ kommt man erst nach 111 Schritten zur Zahl 1. Wählt man $n = 77.031$, muss der Prozess 350-mal erfolgen. Für $n = 15.733.191$ brauchen wir noch mehr Ausdauer: Erst nach 704 Schritten landen wir im **Teufelskreis**!

Aber ungeachtet aller solcher Versuche mit immer neuen Zahlen wissen wir bis heute nicht, ob tatsächlich alle Startzahlen in den **Teufelskreis** münden. Allerdings hat man bisher – trotz Computerunterstützung! – **keine Startzahl** gefunden, für die dieser Prozess **nicht** im **Teufelskreis** endet. Jetzt noch mit Papier und Bleistift ein Gegenbeispiel finden zu wollen, ist deshalb wohl aussichtslos. Denn man hat bereits 2008 gezeigt, dass jede Zahl, die kleiner als die unvorstellbar riesige Zahl $19 \cdot 2^{58}$ ($\approx 5.476 \cdot 10^{18}$, also größer als 5 Trillionen) ist, im **Teufelskreis** enden.
(siehe `https://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html` und für vieles mehr siehe auch `https://www.juergendankert.de/spezmath/html/collatzproblem.html`)

Der australische Mathematiker Terence Tao (*1975) zeigte 2019, dass die Collatz-Vermutung für „fast alle" natürlichen Zahlen „fast" zutrifft (das heißt, man endet mit der Collatz-Folge „nahe" 1, wobei die Schranke für die Nähe vom Startwert abhängt). Beispielsweise folgt aus Taos Satz, dass mindestens 99 % der natürlichen Zahlen bis 1024, mit denen man die Collatz-Folge startet, einen Endwert erreichen, der unter 200 liegt.

Die $(3n+1)$**-Vermutung** lautet, dass alle natürlichen Zahlen wundersam sind. Das $(3n+1)$-Problem schlummerte lange vor sich hin, bevor es wiederentdeckt bzw. wieder zum Leben erweckt worden ist. Deshalb hat dieses Problem gleich mehrere Namen, wie z. B. **Collatz-Problem**, **Ulam-Problem**, **Hasse-Algorithmus**, **Syracuse-Problem**, **Kakutani-Problem** und **Thwaites' Vermutung**.

Kakutani soll um 1960 gesagt haben: „Einen Monat lang arbeitet jeder in Yale daran – ohne Ergebnis. Ein ähnliches Phänomen trat auf, als ich es an der Universität Chicago erwähnte. Der Witz kam auf, das Problem sei Teil einer Verschwörung zur Lähmung der mathematischen Forschung in den Vereinigten Staaten."

Bereits 1970 hatte der britisch-kanadische Mathematiker H. S. M. Coxeter (1907-2003) 50 Dollar als Preis zur Lösung des Problems ausgeschrieben. Dann erhöhte der ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913-1996) diese Summe auf 500 Dollar. Und schließlich versprach 1996 der britische Mathematiker Bryan Thwaites 1000 Pfund für einen Beweis der Behauptung, dass alle Zahlen in den **Teufelskreis** münden. 2021 bot Bakuage Co., Ltd. mit Sitz in Shibuya, Tokio, 120 Millionen Yen (ca. 925.000 Euro) als Preisgeld für die Lösung des Problems.

Ein Gegenbeispiel zu finden, dürfte also nicht einfach sein! Der britisch-kanadische Mathematiker Richard Guy (1916-2020) warnte 1983 vor diesem und drei anderen auch heute noch ungelösten Problemen: „Don't try to solve these problems!" („Versuche nicht, diese Probleme zu lösen!")

Der US-amerikanische Mathematiker Jeff Lagarias (*1949), der diesem Problem sehr viel Zeit gewidmet hatte, ohne einer Lösung nahe zu kommen, nannte es ein gefährliches Problem, da man bei zu intensiver Beschäftigung damit geistige Gesundheit und Karriere aufs Spiel setze.

Der ungarische Mathematiker Paul Erdös (1913-1996) kommentiert das Problem mit: „Die Mathematik ist noch nicht reif für solche Probleme."

Aber dann meldete *Spiegel online* am 5. Juni 2011: „Die Collatz-Vermutung ist etwa 60 Jahre alt – ein Hamburger Mathematiker könnte sie nun bewiesen haben. Prof. Gerhard Opfer hat den von ihm gefundenen Beweis beim Fachblatt *Mathematics of Computation* eingereicht. Ein Preprint ist online verfügbar. Mit der üblichen Vorsicht des seriösen Wissenschaftlers wurde Gerhard Opfer mit den Worten zitiert: „Ich würde erst sagen, dass es stimmt, wenn es begutachtet ist." Im Preprint steht seit dem 17. Juni 2011 jetzt eine „Author's note": „. . . the statement 'that the collatz conjecture is true' has to be withdrawn, at least temporarily." (siehe auch: *Spiegel online*). Schade, aber als Trost mag gelten, womit Gerhard Opfer selbst in *Spiegel online* vom 5. Juni 2011 zitiert wird: „Die Collatz-Vermutung hat eine Vielzahl von Arbeiten ausgelöst. Es wäre eigentlich schade, wenn sie jetzt bewiesen ist, denn dann wäre es damit ja vorbei."

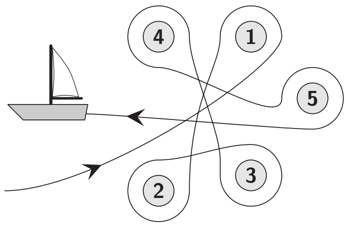
## Klassenstufen 7 und 8

**1.** $\dfrac{20+22}{20-22} =$

(**A**) $-21$ (**B**) $-10$ (**C**) $-2$ (**D**) $22$ (**E**) $42$

*Lösung:* $\dfrac{20+22}{20-22} = \dfrac{42}{-2} = -\dfrac{42}{2} = -21.$

**2.** Annabelle ist um fünf Bojen gesegelt, so wie abgebildet. Um welche Bojen ist sie <u>im Uhrzeigersinn</u> gesegelt?




(**A**) 2, 3 und 4 (**B**) 1, 2 und 3 (**C**) 1, 3 und 5
(**D**) 2, 4 und 5 (**E**) 2, 3 und 5

*Lösung:* Wir verfolgen den Weg, den Annabelle gesegelt ist. Um Boje 1 ist sie gegen den Uhrzeigersinn gesegelt, um Boje 2 im Uhrzeigersinn, um Boje 3 im Uhrzeigersinn, um Boje 4 gegen den Uhrzeigersinn und um Boje 5 im Uhrzeigersinn. Annabelle ist genau um die Bojen 2, 3 und 5 im Uhrzeigersinn gesegelt, wie es bei (**E**) steht.

*— Eine ähnliche Aufgabe war Aufgabe 2 in Klassenstufe 5/6. —*

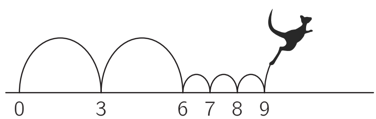
**3.** Beate will die fünf abgebildeten Zahlenkarten in eine Reihe legen. Die entstehende 9-stellige Zahl soll die kleinste mögliche sein. Welche Karte muss sie in die Mitte legen?

(**A**) $\boxed{4}$ (**B**) $\boxed{8}$ (**C**) $\boxed{31}$ (**D**) $\boxed{59}$ (**E**) $\boxed{107}$

*Lösung:* Die Ziffern, die auf den Karten jeweils ganz links stehen, sind alle voneinander verschieden. Für die kleinstmögliche 9-stellige Zahl muss Beate die Karten also von links nach rechts nach der Ziffer, die ganz links steht, ordnen, beginnend mit der kleinsten: $\boxed{107}\boxed{31}\boxed{4}\boxed{59}\boxed{8}$ . In der Mitte liegt die Karte bei (**A**).

*— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 6 zu lösen. —*

**4.** Känguru Konrad springt auf der Zahlengeraden. Er startet bei der 0 und macht wie im Bild immer zwei lange Sprünge und danach drei kurze Sprünge. Auf welcher der folgenden Zahlen landet Konrad?

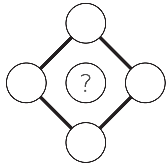



(**A**) 46 (**B**) 47 (**C**) 48 (**D**) 49 (**E**) 50

*Lösung:* Nach jeweils fünf Sprüngen landet Konrad mit dieser Sprungfolge auf den Vielfachen von 9, also auf 9, 18, 27, 36, 45, ... Nach 45 folgt ein langer Sprung auf 48, das ist die Lösung.
Ohne das Muster schrittweise nachzuverfolgen, können wir die Lösung so finden: Da Konrad nur dann auf genau einer von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen landen kann, wenn er mit den zwei langen Sprüngen die anderen Zahlen überspringt, muss von den Antworten die mittlere Zahl die gesuchte sein.

*— In Klassenstufe 3/4 drehte sich Aufgabe 7 um eine ähnliche Fragestellung. —*

**5.** In die Kreise rechts sollen die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 eingetragen werden. Das Produkt der vier Zahlen im äußeren Quadrat soll 144 sein. Welche Zahl gehört in den Kreis in der Mitte?




(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

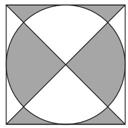
*Lösung:* Da 144 nicht auf 0 und nicht auf 5 endet, ist 144 nicht durch 5 teilbar. Die 5 kann nicht zu den vier Zahlen gehören, deren Produkt 144 ist, und muss im Kreis in der Mitte stehen.
Das lässt sich auch durch Zerlegen herausfinden: $144 = 12 \cdot 12 = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4$; die 5 ist nicht dabei.

**6.** Das Nummernschild von Alains Traktor ist abgefallen. Er hat es aus Versehen verkehrt herum wieder angebracht, aber das macht keinen Unterschied. Welches Nummernschild könnte Alains Traktor haben?

(**A**) 04 NSN 40 (**B**) 60 HOH 09 (**C**) 80 BNB 08 (**D**) 03 HNH 30 (**E**) 08 XBX 80

*Lösung:* Wir drehen in Gedanken jedes Nummernschild um 180° (oder wir drehen einfach das Aufgabenblatt). Nur das Nummernschild bei (**B**) sieht genauso aus, als hätten wir es nicht gedreht. Bei den anderen Nummernschildern steht immer eine Zahl (die 3 oder die 4) oder ein Buchstabe (das B) verkehrt herum.

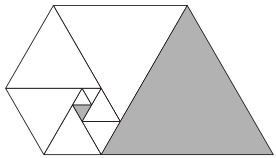
**7.** Das abgebildete Quadrat hat die Seitenlänge 10 cm. Welchen Flächeninhalt hat der graue Teil der Fläche?



(**A**) 40 $\text{cm}^2$ (**B**) 45 $\text{cm}^2$ (**C**) 50 $\text{cm}^2$ (**D**) 55 $\text{cm}^2$ (**E**) 60 $\text{cm}^2$

*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass das Quadrat auf transparente Folie gemalt ist und wir die Folie entlang einer Diagonalen zusammenfalten. Es landen immer eine graue und eine weiße Fläche aufeinander. Also ist genau die Hälfte des Quadrats grau, und das sind $(10\,\text{cm})^2 : 2 = 50\,\text{cm}^2$.
*— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 18 zu lösen. —*

**8.** Die Figur im Bild rechts ist aus lauter gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt. Das kleine graue Dreieck hat die Seitenlänge 1 cm. Welche Seitenlänge hat das große graue Dreieck?



(**A**) 8 cm (**B**) 9 cm (**C**) 10 cm (**D**) 11 cm (**E**) 12 cm

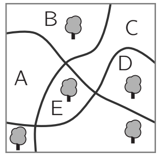
*Lösung:* Neben dem kleinen grauen Dreieck gibt es zwei weitere Dreiecke mit der Seitenlänge 1 cm. Die Seitenlänge der beiden nächstgrößeren Dreiecke ist die Summe von zwei Seitenlängen der kleinsten Dreiecke, also 2 cm. Die Seitenlänge der nächstgrößeren Dreiecke ist jeweils die Summe der Seitenlängen der beiden angrenzenden kleineren Dreiecke, der Reihe nach also $(2\,\text{cm} + 1\,\text{cm} =)\,3\,\text{cm}$, $(3\,\text{cm}+1\,\text{cm} =)\,4\,\text{cm}$, $(4\,\text{cm}+1\,\text{cm} =)\,5\,\text{cm}$, $(5\,\text{cm}+2\,\text{cm} =)\,7\,\text{cm}$ und schließlich $(7\,\text{cm}+2\,\text{cm} =)\,9\,\text{cm}$. Das ist die gesuchte Seitenlänge des großen grauen Dreiecks.

**9.** Beim Wasserspringen zeigt jedes Mädchen aus Tinas Trainingsgruppe 7 Sprünge vom 3-Meter-Brett. Die Trainerin hat gezählt, dass schon 22 Sprünge gezeigt wurden. Sie weiß, dass noch 34 Sprünge gezeigt werden müssen. Wie viele Mädchen sind insgesamt in Tinas Trainingsgruppe?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

*Lösung:* Die Summe aus der Anzahl der Sprünge, die schon gezeigt wurden, und der Anzahl der Sprünge, die noch ausstehen, ist die Gesamtzahl der Sprünge, die die Mädchen beim Training insgesamt zeigen. Da jedes Mädchen 7 Sprünge zeigt, sind es also $(22+34) : 7 = 56 : 7 = 8$ Mädchen.

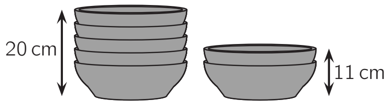
**10.** In einem kleinen Park stehen fünf Bäume. Ein neuer Baum soll gepflanzt werden, und zwar so, dass auf beiden Seiten eines jeden der drei Wege jeweils gleich viele Bäume stehen. In welchen Bereich muss der neue Baum gepflanzt werden?




(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

*Lösung:* Wir schauen uns für jeden der drei Wege an, auf welcher Seite davon der neue Baum gepflanzt werden muss. Das ist jeweils die Seite, auf der bisher nur 2 Bäume stehen. Der neue Baum muss links des Weges gepflanzt werden, der von unten nach oben verläuft, also in einen der Bereiche A oder B (oder in den kleinen Bereich links unten), und gleichzeitig oberhalb des Weges, der von links oben nach rechts unten verläuft, also in einen der Bereiche B, C oder D. Damit ist schon klar, dass der Bereich B gesucht ist. Dass die Bedingung dann auch für den Weg, der von links unten nach rechts oben verläuft, erfüllt ist, lässt sich schnell nachzählen. (**B**) ist richtig.

**11.** Ein Stapel aus 5 Schüsseln ist 20 cm hoch, und ein Stapel aus 2 dieser Schüsseln ist 11 cm hoch. In meinem Geschirrschrank ist jedes Fach 30 cm hoch. Wie viele solche Schüsseln kann ich höchstens so stapeln, dass der ganze Stapel in den Geschirrschrank passt?




(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

*Lösung:* Ein Stapel aus 5 Schüsseln entsteht, wenn wir auf den Stapel aus 2 Schüsseln 3 weitere Schüsseln stapeln. Da der Stapel aus 5 Schüsseln um $20\,\text{cm} - 11\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$ höher ist als der aus 2 Schüsseln, ragen die oberen Schüsseln jeweils $9\,\text{cm} : 3 = 3\,\text{cm}$ aus der Schüssel direkt darunter heraus. Ein Stapel aus 6, 7, 8, 9, ... Schüsseln hat eine Höhe von 23 cm, 26 cm, 29 cm, 32 cm, ... Da jedes Fach im Geschirrschrank 30 cm hoch ist, können höchstens 8 Schüsseln gestapelt werden.

— *In Klassenstufe 5/6 gab es in Aufgabe 15 eine ähnliche Fragestellung.* —

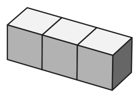
**12.** Vier Pluszeichen und ein Minuszeichen sollen in die Kästchen rechts so eingetragen werden, dass die Rechnung richtig ist. Wohin gehört das Minuszeichen?

$$2\,\square\,3\,\square\,4\,\square\,5\,\square\,6\,\square\,7 = 15$$

(**A**) zwischen 2 und 3 (**B**) zwischen 3 und 4 (**C**) zwischen 4 und 5
(**D**) zwischen 5 und 6 (**E**) zwischen 6 und 7

*Lösung:* Würden wir in alle Kästchen ein Pluszeichen schreiben, so wäre das Ergebnis der Rechnung $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$. Wenn wir nun eines der Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzen, verringert sich das Ergebnis um das Doppelte der Zahl, vor der nun das Minuszeichen steht, denn zum einen wird der positive Summand weggelassen und dann durch das Minuszeichen obendrein noch abgezogen. Da sich 27 und das gewünschte Ergebnis 15 um $27 - 15 = 12$ unterscheiden, gehört das Minuszeichen wegen $12 : 2 = 6$ also vor die 6, das heißt zwischen 5 und 6, wie es bei (**D**) steht.

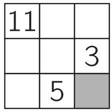
**13.** Auf einem Spielwürfel ist die Summe zweier gegenüberliegender Augenzahlen stets 7. Drei Spielwürfel wurden wie abgebildet zusammengeklebt. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Augen, die auf der gesamten Oberfläche liegen können?



(**A**) 40 (**B**) 41 (**C**) 42 (**D**) 43 (**E**) 44

*Lösung:* Von jedem der drei Würfel gehören zwei Paare gegenüberliegender Seitenflächen zur Oberfläche des abgebildeten Körpers. Auf diesen Seitenflächen sind insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ Augen. Die kleinstmögliche Anzahl an Augen auf der Oberfläche ergibt sich genau dann, wenn sich auf den beiden übrigen Seitenflächen jeweils 1 Auge befindet. Die kleinstmögliche Anzahl an Augen auf der gesamten Oberfläche des abgebildeten Körpers ist somit $42 + 2 = 44$.

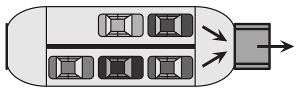
**14.** In jedes Kästchen des abgebildeten $3 \times 3$-Feldes soll eine natürliche Zahl eingetragen werden. Dabei soll in jeder Zeile und in jeder Spalte die jeweils mittlere Zahl der Durchschnitt der beiden äußeren Zahlen sein. Drei Zahlen sind schon eingetragen. Welche Zahl gehört in das graue Kästchen unten rechts?




(**A**) 7 (**B**) 5 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

*Lösung:* Da die mittlere Zahl einer jeden Zeile oder Spalte jeweils der Durchschnitt der beiden äußeren Zahlen sein soll und in allen Kästchen natürliche Zahlen stehen sollen, müssen die beiden äußeren Zahlen einer jeden Zeile oder Spalte jeweils beide ungerade oder beide gerade sein. Anhand der Einträge lesen wir ab, dass oben in der Mitte, links in der Mitte sowie in alle Eckfeldern ungerade Zahlen stehen müssen. (**D**) entfällt damit. Außerdem entfällt (**A**), denn hierfür müsste rechts oben $-1$, also eine negative Zahl stehen. Wir überlegen für die anderen Antworten, welche Zahlen oben rechts und oben in der Mitte stehen würden: (**B**) oben rechts: 1, oben Mitte: 6, (**C**) oben rechts: 3, oben Mitte: 7, (**E**) oben rechts: 5, oben Mitte: 8. Nur bei (**C**) steht oben in der Mitte eine ungerade Zahl, also ist (**C**) die Lösung.

**15.** Auf einer Fähre stehen wie abgebildet fünf Autos, die die Fähre eines nach dem anderen verlassen wollen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es dafür?



(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 12

*Lösung:* Für das erste der zwei Autos aus der im Bild oberen Reihe gibt es 4 mögliche Positionen in der Autoschlange, die die Fähre verlässt. Es kann an 1., 2., 3. oder 4. Stelle fahren. Für das zweite Auto aus der oberen Reihe gibt es im ersten Fall 4 mögliche Positionen, im zweiten Fall 3, im dritten Fall 2 und im letzten Fall eine. Die Positionen der drei Autos aus der unteren Reihe sind in jedem Fall eindeutig bestimmt, weshalb es insgesamt $4+3+2+1 = 10$ mögliche Reihenfolgen gibt. Systematisch aufgeschrieben sehen diese so aus, wobei O bzw. U für ein Auto aus der oberen bzw. der unteren Reihe steht:

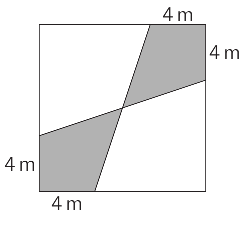
OOUUU, OUOUU, OUUOU, OUUUO
UOOUU, UOUOU, UOUUO
UUOOU, UUOUO
UUUOO

**16.** Das Durchschnittsalter der drei Brüder Jonas, Moritz und Simon ist 10. Das Durchschnittsalter von Jonas und Simon ist 11 und das von Jonas und Moritz ist 12. Wie alt ist der älteste der drei Brüder?

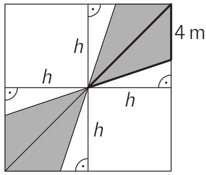
(**A**) 13 Jahre (**B**) 14 Jahre (**C**) 15 Jahre (**D**) 16 Jahre (**E**) 17 Jahre

*Lösung:* Wir bezeichnen das Alter von Jonas, Moritz und Simon mit $j$, $m$ bzw. $s$. Da das Durchschnittsalter der drei Brüder 10 ist, gilt $(j + m + s) : 3 = 10$, das heißt $j + m + s = 30$. Da das Durchschnittsalter von Jonas und Simon 11 ist, gilt $(j + s) : 2 = 11$, das heißt $j + s = 22$. Daraus ergibt sich $m = 30 - 22 = 8$ für das Alter von Moritz. Da das Durchschnittsalter von Jonas und Moritz 12 ist, gilt $(j + m) : 2 = 12$, das heißt $j + m = 24$. Daraus ergibt sich $s = 30 - 24 = 6$ für das Alter von Simon. Schließlich erhalten wir $j = 30 - 8 - 6 = 16$ für das Alter von Jonas – das ist der älteste der drei Brüder, (**D**) ist die Lösung.

**17.** Das abgebildete Quadrat hat die Seitenlänge 12 m. Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche?



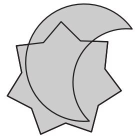

(**A**) 48 m$^2$ (**B**) 46 m$^2$ (**C**) 44 m$^2$ (**D**) 40 m$^2$ (**E**) 36 m$^2$




*Lösung:* Durch Einzeichnen einer Diagonale des Quadrats zerlegen wir die graue Fläche in vier kongruente Dreiecke. Die Länge $h$ der zur Seite mit der Seitenlänge 4 m gehörigen Höhe ist halb so groß wie die Seitenlänge des Quadrats, also 6 m, denn der gemeinsame Punkt der vier grauen Dreiecke ist der Mittelpunkt des Quadrats, da die gesamte Figur symmetrisch ist. Damit beträgt der Flächeninhalt der grauen Fläche $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{m} \cdot 6\,\text{m} = 48\,\text{m}^2$.

Wem es leichter fällt, die weiße Fläche zu zerlegen, kann die Lösung auch damit finden. Die weiße Fläche setzt sich wie zu sehen aus zwei Quadraten mit der Seitenlänge 6 m und vier rechtwinkligen Dreiecken zusammen, deren an den rechten Winkel angrenzende Seiten die Längen 6 m und 2 m haben. Die weiße Fläche hat also den Flächeninhalt $2 \cdot 6\,\text{m} \cdot 6\,\text{m} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 96\,\text{m}^2$. Das große Quadrat hat den Flächeninhalt $12\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} = 144\,\text{m}^2$ und die graue Fläche folglich $144\,\text{m}^2 - 96\,\text{m}^2 = 48\,\text{m}^2$.

**18.** Im Bild rechts gehören 45 % der grauen Fläche sowohl zum Stern als auch zum Mond. 40 % der grauen Fläche gehören zum Stern, aber nicht zum Mond. Wie viel Prozent der Fläche des Mondes liegen außerhalb des Sterns?



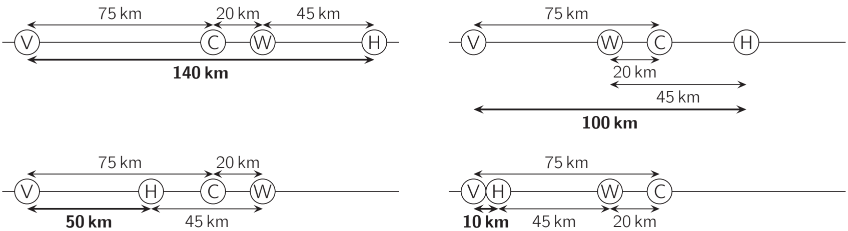
(**A**) 20 % (**B**) 25 % (**C**) 30 % (**D**) 35 % (**E**) 50 %

*Lösung:* Von der grauen Fläche gehören 45 % sowohl zum Mond als auch zum Stern, und es gehören 100 % − 40 % − 45 % = 15 % zum Mond, aber nicht zum Stern. Wegen 45 % : 15 % = 3 liegt von der Fläche des Mondes also 3-mal so viel innerhalb des Sterns wie außerhalb, also 75 % innerhalb und 25 % außerhalb, wie bei (**B**) angegeben.

**19.** Anton und Marja erzählen von einer Radtour von Stendal nach Lüneburg: „Der Radweg führt durch die Orte Viehle, Wahrenberg, Cumlosen und Hohenwulsch. Die Entfernung auf dem Radweg zwischen Wahrenberg und Hohenwulsch beträgt 45 km, zwischen Viehle und Cumlosen 75 km und zwischen Wahrenberg und Cumlosen 20 km.“ In welcher Reihenfolge diese Orte am Radweg liegen, haben sie nicht erzählt. Was ist sicher <u>nicht</u> die Entfernung auf dem Radweg zwischen Viehle und Hohenwulsch?

(**A**) 140 km (**B**) 100 km (**C**) 80 km (**D**) 50 km (**E**) 10 km

*Lösung:* Wir überlegen, welche Reihenfolge die vier Orte entlang des Radweges haben können. Wir beginnen mit der längsten Distanz 75 km zwischen Viehle und Cumlosen. Wahrenberg liegt 20 km von Cumlosen entfernt und auf dem Radweg entweder nach oder vor Cumlosen. Hohenwulsch liegt 45 km von Wahrenberg entfernt und auf dem Radweg entweder nach oder vor Wahrenberg. Es ergeben sich die folgenden vier Fälle, für die wir jeweils die Entfernung zwischen Viehle und Hohenwulsch ermitteln:

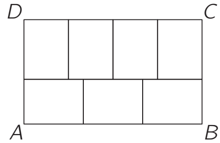



Wir erhalten 140 km, 50 km, 100 km oder 10 km für die Entfernung zwischen Viehle und Hohenwulsch. (**C**) 80 km ist nicht dabei und somit die Lösung.

Übrigens gibt es diese vier Orte wirklich. Von Stendal nach Lüneburg ist die tatsächliche Reihenfolge mit den angegebenen Entfernungen Hohenwulsch–Wahrenberg–Cumlosen–Viehle, wie im ersten Fall.

*— Ein Problem, das ähnlich gelöst werden kann, war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 23 gestellt. —*

**20.** Das Rechteck $ABCD$ ist wie abgebildet in sieben identische Rechtecke zerlegt. Die Seite $\overline{BC}$ ist 42 cm lang. Wie lang ist die Seite $\overline{AB}$?




(**A**) 56 cm (**B**) 60 cm (**C**) 66 cm (**D**) 68 cm (**E**) 72 cm

*Lösung:* Wir bezeichnen die Länge der langen Seite eines der kleinen Rechtecke mit $a$ und die Länge der kurzen Seite mit $b$. Die Seite $\overline{AB}$ hat die Länge $3a$, was dasselbe wie $4b$ ist, da die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Die Länge der Seite $\overline{BC}$ ist gegeben, also gilt $a + b = 42\,\text{cm}$. Wenn wir diese Gleichung mit 3 multiplizieren, erhalten wir $3a + 3b = 3 \cdot 42\,\text{cm}$ und können ausnutzen, dass $3a = 4b$ gilt. Wir erhalten $4b + 3b = 3 \cdot 42\,\text{cm}$, woraus $7b = 3 \cdot 42\,\text{cm}$ und schließlich $b = 3 \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$ folgt. Die Seite $\overline{AB}$ ist somit $4 \cdot 18\,\text{cm} = 72\,\text{cm}$ lang.
Eine andere Lösungsmöglichkeit erhalten wir, indem wir den Flächeninhalt betrachten. Ein kleines Rechteck hat den Flächeninhalt $a \cdot b$. Das große Rechteck hat einerseits den Flächeninhalt $7 \cdot (a \cdot b)$ und andererseits $|BC| \cdot |AB| = 42\,\text{cm} \cdot (3 \cdot a)$. Also gilt $7 \cdot a \cdot b = 42\,\text{cm} \cdot 3 \cdot a$. Daraus folgt $b = 18\,\text{cm}$, und weil $|BC| = 42\,\text{cm}$ gilt, erhalten wir $a = 24\,\text{cm}$. Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist somit $3 \cdot a = 72\,\text{cm}$.

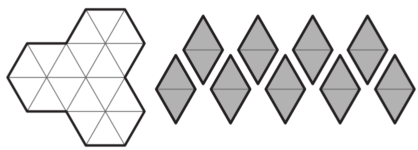
**21.** Die Kirchturmuhren in Vordorf und Nachburg sind schon sehr alt. Die Uhr in Vordorf geht pro Stunde eine Minute vor. Die Uhr in Nachburg geht pro Stunde zwei Minuten nach. Erst gestern wurden sie beide gleichzeitig auf die richtige Zeit gestellt. Heute zeigte die Uhr in Vordorf 13:00 Uhr und die Uhr in Nachburg zum selben Zeitpunkt 12:00 Uhr. Wann wurden die beiden Uhren gestern gestellt?

(**A**) 23:00 Uhr (**B**) 20:40 Uhr (**C**) 18:30 Uhr (**D**) 16:40 Uhr (**E**) 15:20 Uhr

*Lösung:* Die Uhr in Vorburg geht pro Stunde eine Minute vor und die Uhr in Nachburg pro Stunde zwei Minuten nach. Also wächst der Unterschied der angezeigten Uhrzeiten pro Stunde um 3 Minuten. Da er zum genannten Zeitpunkt 60 Minuten beträgt, sind seit dem Stellen der Uhren 20 Stunden vergangen. Die Uhr in Vordorf geht somit in diesem Moment 20 Minuten vor, weshalb die korrekte Uhrzeit 12:40 Uhr ist. Und 20 Stunden davor war es 16:40 Uhr, das ist die gesuchte Uhrzeit.

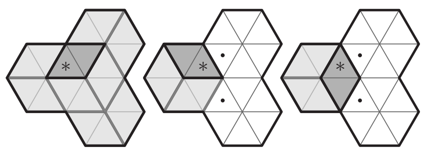
*Wir stellen uns vor, dass die beiden Uhren in der letzte Aufgabe weiterlaufen, ohne dass sie neu gestellt werden. Wann zeigen sie das nächste Mal dieselbe Uhrzeit? Und wann zeigen sie das nächste Mal beide die richtige Uhrzeit?*

**22.** Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figur vollständig mit den daneben abgebildeten Teilen auszulegen?



(**A**) 2 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

*Lösung:* Wie dargestellt, gibt es drei Möglichkeiten, das mit dem Sternchen markierte Dreieck mit einem der Teile zu überdecken. Im ersten Fall gibt es genau eine Möglichkeit, die gesamte Figur vollständig zu überdecken. In den anderen beiden Fällen ergibt sich zunächst nur eine eindeutige Überdeckung des linken Teilsechsecks. Für die beiden an dieses Sechseck angrenzenden Dreiecke, die im Bild mit einem Punkt markiert sind, gibt es jeweils zwei Möglichkeiten, sie mit einem der Teile zu überdecken und in jedem der vier Fälle gibt es dann genau eine Möglichkeit, die Figur vollständig zu überdecken. Insgesamt gibt es also $1 + 4 + 4 = 9$ Möglichkeiten.



**23.** Fritzi läuft zur Schule oder sie fährt mit dem Fahrrad (jeweils mit konstanter Geschwindigkeit und immer derselben). Mit dem Fahrrad braucht sie 10 Minuten, zu Fuß braucht sie 30 Minuten. Gestern ist Fritzi früh losgeradelt und hat auf dem Weg ihre Freundin Eva abgeholt. Ihr Fahrrad hat sie bei Eva gelassen und ist mit ihr zur Schule gelaufen. So hat Fritzi für ihren Schulweg 26 Minuten gebraucht. Welchen Teil der Strecke ist Fritzi mit dem Fahrrad gefahren?

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{1}{5}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{1}{2}$

*Lösung:* Wir bezeichnen den gesuchten Anteil der Strecke, den Fritzi mit dem Fahrrad gefahren ist, mit $a$. Dann ist der Anteil der Strecke, den sie zu Fuß zurückgelegt hat, gleich $1 - a$. Weil sich Fritzi stets mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, sind zurückgelegter Weg und dafür benötigte Zeit zueinander proportional. Fritzi war also $a \cdot 10$ min mit dem Fahrrad unterwegs und $(1-a) \cdot 30$ min zu Fuß.

Also gilt $a \cdot 10\,\text{min} + (1 - a) \cdot 30\,\text{min} = 26\,\text{min}$, woraus durch Umformen $a = \frac{1}{5}$ folgt.

Es ist auch möglich, die jeweiligen Geschwindigkeiten und Wegstücke geeignet zu bezeichnen und mit Hilfe der bekannten Beziehungen für zurückgelegten Weg, dafür benötigte Zeit und Geschwindigkeit bei gleichförmigen Bewegungen Gleichungen aufzustellen und umzuformen.

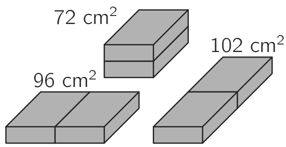
**24.** Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Fatih markiert zwischen je zwei benachbarten Punkten jeweils einen weiteren Punkt. Dann markiert er zwischen je zwei benachbarten der nun vorhandenen Punkte jeweils einen weiteren Punkt. Das macht Fatih insgesamt vier Mal. Nun sind auf der Geraden insgesamt 225 Punkte markiert. Wie viele Punkte waren zu Beginn auf der Geraden markiert?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 19

*Lösung:* Wenn auf der Geraden $n$ Punkte markiert sind, dann kommen beim Markieren $n - 1$ Punkte dazu. Insgesamt sind dann $2n - 1$ Punkte markiert. Die neue Anzahl an markierten Punkten ist also um 1 kleiner als das Doppelte der vorherigen Anzahl. Das gilt für jeden der Markierungsschritte und wir können rückwärts rechnen: Vor dem vierten Markieren waren es $(225 + 1) : 2 = 113$ Punkte, vor dem dritten Markieren $(113 + 1) : 2 = 57$, vor dem zweiten Markieren $(57 + 1) : 2 = 29$ und vor dem ersten Markieren $(29 + 1) : 2 = 15$, und das ist die gesuchte Anzahl zu Beginn.

*In der letzten Aufgabe könnten wir auch weiter vorwärts rechnen: Nach dem 1. Schritt sind es $2n - 1$ Punkte, nach dem 2. Schritt $2(2n - 1) - 1 = 4n - 3$ Punkte usw. Wie lautet die Formel für die Anzahl der Punkte nach dem 4. Schritt? Wie viele Punkte sind es nach dem 6. oder nach dem 9. Schritt?*

**25.** Zwei quaderförmige Bausteine mit denselben Abmessungen können auf drei verschiedene Weisen zu einem größeren Quader zusammengesetzt werden. Die Oberflächen dieser drei größeren Quader sind $72\,\text{cm}^2$, $96\,\text{cm}^2$ und $102\,\text{cm}^2$ groß. Welchen Oberflächeninhalt hat ein einzelner Baustein?




(**A**) $36\,\text{cm}^2$ (**B**) $48\,\text{cm}^2$ (**C**) $52\,\text{cm}^2$ (**D**) $54\,\text{cm}^2$ (**E**) $60\,\text{cm}^2$

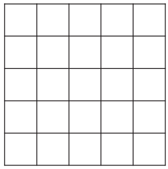
*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass wir die Quader in die Bausteine zerlegen. Dabei vergrößert sich die Gesamtoberfläche genau um die Oberfläche eines Bausteins. Da wir nun 6 Bausteine haben, ist die Gesamtoberfläche der Quader genauso groß wie die Oberfläche von 5 Bausteinen. Der Oberflächeninhalt eines Bausteins beträgt also $(72\,\text{cm}^2 + 96\,\text{cm}^2 + 102\,\text{cm}^2) : 5 = 270\,\text{cm}^2 : 5 = 54\,\text{cm}^2$.
Dass die Summe der Oberflächeninhalte der drei Quader das Fünffache des Oberflächeninhalts eines einzelnen Bausteins ist, lässt sich auch durch Auszählen der verschiedenen Seitenflächen finden.

**26.** Meerjungfrau Mariella hat sich verirrt, seit Tagen schwimmt sie umher. Als sie eine lila Krabbe und einen Seestern trifft, fragt sie die beiden nach dem Wochentag. Mariella weiß wohl, dass lila Krabben montags, dienstags und mittwochs immer lügen und Seesterne donnerstags, freitags und samstags immer lügen – an den jeweils anderen Tagen sprechen sie die Wahrheit. Beide Antworten sind rätselhaft und obendrein völlig gleich: „Gestern war einer meiner Lügentage.“ Mariella überlegt kurz, dann ist alles klar. Nun muss sie nur noch den Weg nach Hause finden. Welcher Wochentag ist es?

(**A**) Donnerstag (**B**) Freitag (**C**) Samstag (**D**) Sonntag (**E**) Montag

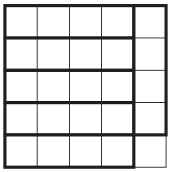
*Lösung:* Die Aussage wird von jeder der beiden Kreaturen nur an einem Lügentag getroffen, der auf einen Wahrheitstag folgt, oder an einem Wahrheitstag, der auf einen Lügentag folgt. Da bei beiden Wahrheits- und Lügentage in Blöcken zusammenhängen, gibt es dafür nur jeweils zwei Möglichkeiten. Bei der lila Krabbe kommen nur Montag und Donnerstag in Frage, und beim Seestern sind es Donnerstag und Sonntag. Also ist es Donnerstag.
Hier lässt sich auch gut mit einer Tabelle arbeiten, in der Lügentage und Wahrheitstage eingetragen werden und dazu jeweils, ob die Aussage an diesem Tag möglich ist oder nicht.

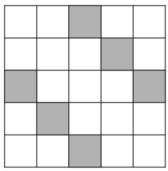
**27.** In einem $5 \times 5$-Quadrat sollen einige Kästchen ausgemalt werden. Dabei soll in jedem $1 \times 4$-Rechteck und in jedem $4 \times 1$-Rechteck mindestens ein ausgemaltes Kästchen liegen. Was ist die kleinste Anzahl an Kästchen, die ausgemalt werden müssen?



(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

*Lösung:* In das $5 \times 5$-Quadrat lassen sich, wie das linke Bild zeigt, 6 Rechtecke vom Format $1 \times 4$ oder $4 \times 1$ ohne Überlappungen einzeichnen. Es genügt daher nicht, weniger als 6 Kästchen auszumalen. Mit 6 Kästchen klappt es (siehe Beispiel im rechten Bild), wie man durch geschicktes Probieren findet. Hilfreich ist die Erkenntnis, dass dafür kein Eckkästchen ausgemalt werden darf, denn das linke Bild (oder eine gedrehte Version davon) zeigt, dass dann mindestens 7 Kästchen ausgemalt werden müssten. (**B**) ist richtig.

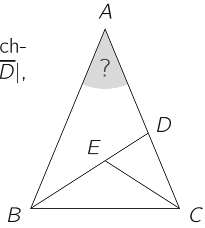




**28.** Tante Carin möchte ihren Flur grün streichen. Sie hat blaue und gelbe Farbe und will aus 2 Litern blauer und 3 Litern gelber Farbe 5 Liter grüne Farbe mischen. Schon beim Rühren merkt sie, dass etwas nicht stimmt. Carin hat aus Versehen 3 Liter blaue und 2 Liter gelbe Farbe genommen. Wie viel grüne Farbe aus der Mischung muss Carin durch gelbe Farbe ersetzen, damit sie 5 Liter Farbe im gewünschten Grünton hat?

(**A**) $\frac{6}{5}$ Liter (**B**) $\frac{3}{2}$ Liter (**C**) $\frac{7}{3}$ Liter (**D**) $\frac{9}{5}$ Liter (**E**) $\frac{5}{3}$ Liter

*Lösung:* Für diese Aufgabe gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Am kürzesten ist wohl diese hier: Aus der falschen Mischung muss genau 1 Liter blaue Farbe entfernt werden. Da das $\frac{1}{3}$ der blauen Farbe in der Mischung ist, muss $\frac{1}{3}$ der Mischung ersetzt werden, also $\frac{5}{3}$ Liter.
Und eine zweite Variante geben wir noch an: Aus der falschen Mischung muss genau so viel grüne Farbe entfernt werden, dass darin genau 1 Liter blaue Farbe enthalten ist. Da sich das Volumen von blauer Farbe zu gelber in der falschen Mischung wie 3 : 2 verhält, werden mit genau 1 Liter blauer Farbe auch $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ Liter gelber Farbe mit entfernt. Insgesamt müssen also $\frac{5}{3}$ Liter Farbe ersetzt werden.




**29.** Das gleichschenklige Dreieck $ABC$ kann wie abgebildet in drei kleinere gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden. Dabei gelten $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$, $|\overline{AD}| = |\overline{BD}|$, $|\overline{CD}| = |\overline{CE}|$ und $|\overline{BE}| = |\overline{CE}|$ (*Abbildung nicht maßstabsgerecht*).
Wie groß ist der Innenwinkel bei $A$?

(**A**) 24° (**B**) 28° (**C**) 30° (**D**) 32° (**E**) 36°

*Lösung:* Aus den gegebenen Gleichungen folgt, dass in den gleichschenkligen Dreiecken $ABC$, $ABD$, $CDE$, $BCE$ die Seite $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ bzw. $\overline{BC}$ die Basis ist. Die Basiswinkel in diesen Dreiecken sind jeweils gleich groß. Wir bestimmen die Größen der Innenwinkel im Dreieck $ABC$. Mit $\alpha$ bezeichnen wir die gesuchte Größe des Innenwinkels bei $A$. Es gilt $\measuredangle DBA = \measuredangle BAD = \alpha$. Da sich die Innenwinkel im Dreieck zu 180° addieren, gilt $\measuredangle ADB = 180° - 2\alpha$. Der Nebenwinkel $\measuredangle EDC$ hat somit die Größe $2\alpha$. Also gilt $\measuredangle CED = \measuredangle EDC = 2\alpha$. Der Nebenwinkel $\measuredangle BEC$ hat somit die Größe $180° - 2\alpha$, und aus dem Innenwinkelsatz für Dreiecke folgt, dass die beiden anderen Innenwinkel im Dreieck $BCE$ zusammen die Größe $2\alpha$ haben. Also gilt $\measuredangle CBE = \measuredangle ECB = \alpha$. Nun hat der Innenwinkel des großen Dreiecks $ABC$ im Punkt $B$ die Größe $\measuredangle CBE + \measuredangle EBA = 2\alpha$. Also gilt $\measuredangle ACB = \measuredangle CBA = 2\alpha$. Damit kennen wir alle Innenwinkelgrößen im Dreieck $ABC$. Ihre Summe ist $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha$, und wegen $5\alpha = 180°$ folgt schließlich $\alpha = 180° : 5 = 36°$.

**30.** In 7 Gewächshäusern züchtet Gregor Primeln und Alpenveilchen. In jedem Gewächshaus ist die Anzahl der Primeln genauso groß wie die Gesamtanzahl der Alpenveilchen in allen anderen Gewächshäusern. Primeln hat Gregor insgesamt 2022. Wie viele Alpenveilchen hat er insgesamt?

(**A**) 288 (**B**) 337 (**C**) 576 (**D**) 674 (**E**) 1011

*Lösung:* Wir stellen uns vor, dass wir aus einem der Gewächshäuser, nennen wir es $X$, ein Alpenveilchen entfernen. Wir überlegen, was zu tun ist, damit die Bedingung, dass in jedem Gewächshaus die Anzahl der Primeln genauso groß ist wie die Gesamtanzahl der Alpenveilchen in allen anderen Gewächshäusern, weiterhin erfüllt ist. Das ist der Fall, wenn wir aus allen Gewächshäusern außer $X$ eine Primel entfernen. Nun können wir genauso fortfahren: Wir entfernen aus einem der Gewächshäuser ein Alpenveilchen und aus den anderen jeweils eine Primel. Da es 7 Gewächshäuser sind, entfernen wir schrittweise 6-mal so viele Primeln wie Alpenveilchen. Der Prozess endet, wenn kein Alpenveilchen mehr vorhanden ist, was genau dann eintritt, wenn auch keine Primel mehr vorhanden ist. Also gibt es insgesamt 6-mal so viele Primeln wie Alpenveilchen, und die gesuchte Anzahl ist $2022 : 6 = 337$.
Diese Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe von Gleichungen lösen, wozu wir mit $p_1, p_2, \ldots, p_7$ die Anzahl der Primeln und mit $a_1, a_2, \ldots, a_7$ die Anzahl der Alpenveilchen in den 7 Gewächshäusern bezeichnen. Nach Aufgabenstellung gilt $p_1 = a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$, $p_2 = a_1+a_3+a_4+a_5+a_6$, $p_3 = a_1+a_2+a_4+a_5+a_6$ und so weiter. Indem wir diese Gleichungen addieren, erhalten wir auf der linken Seite die Gesamtanzahl der Primeln, also 2022. Auf der rechten Seite erhalten wir das Sechsfache der gesuchten Gesamtanzahl der Alpenveilchen, die folglich $2022 : 6 = 337$ beträgt.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | A | C | D | C | E | B | E | D |
| Aufgabe | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Antwort | B | B | A | C | A | D | C | C |
| Aufgabe | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Antwort | E | D | B | A | E | B | D | D |

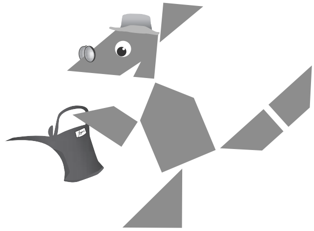
Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | E | E | D | B | C | A | E | B |
| Aufgabe | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Antwort | B | B | C | B | D | A | C | A |
| Aufgabe | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| Antwort | D | B | B | E | A | E | C | D |

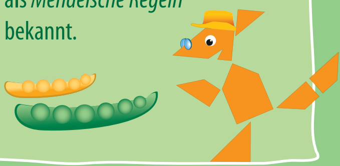
Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antwort | A | E | A | C | D | B | C | B | A | B |
| Aufgabe | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| Antwort | B | D | E | C | D | D | A | B | C | E |
| Aufgabe | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| Antwort | D | D | B | C | D | A | B | E | E | B |

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.



Das Titelbild widmet sich dem 200. Geburtstag von Gregor Mendel. Er züchtete Erbsenpflanzen, um herauszufinden, wie einzelne Merkmale vererbt werden. Hinter der „Erbsenzählerei" steckt eine statistische Auswertung. Die von ihm entdeckten Gesetzmäßigkeiten sind als *Mendelsche Regeln* bekannt.



grafik | www.elephant-castle.de

**www.kaenguru-schweiz.ch**
**www.kangourou-suisse.ch**