2021

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2021“

Letztes Jahr bekam der immer im März stattfindende Mathematik-Wettbewerb in der Schweiz eine spezielle Form. Wegen der schwierigen Pandemiezustände haben wir das Wettbewerbsmaterial den angemeldeten Schulen zur individuellen Verwendung zur Verfügung gestellt. Teilweise wurden die Aufgaben den Teilnehmenden nach Hause mitgegeben, wo sie eine Abwechslung zum Fernunterricht darstellten. Teilweise wurden sie erst später im Klassenverband gelöst. Wir haben trotz der unüblichen Durchführung einige gute Rückmeldungen bekommen und sind froh darüber, dass die am internationalen Meeting in Chicago vom November 2019 zusammengestellten Aufgaben schliesslich eine gute Verwendung gefunden haben.

Dieses Jahr scheint die Durchführung des Wettbewerbs fast wieder die normale Form gefunden zu haben. Es haben sich zwar einige Schulen abgemeldet, weil die immer noch schwierige Pandemiesituation keine Durchmischung von Schulklassen zuliess. Aber dank vieler neuangemeldeter Schulen und dank der neuen Möglichkeit, den Wettbewerb jetzt auch online zu absolvieren, haben wir fast wieder gleich viele Anmeldungen bekommen wie letztes Jahr.

Das Interessante und Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von Aufgaben aus Lehrbüchern und anderen Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den verschiedenen Teilnehmerländern und Kulturen einfliessen. Nebst richtigem Rechnen waren vor allem kluges Denken, geschicktes Kombinieren, ein gutes Gefühl für Grössenordnungen, etwas Vorstellungsvermögen und eine Portion Logik gefragt. Im Mathematikunterricht werden diese Fertigkeiten in besonderem Masse gelehrt, gelernt und geübt.

Diese Broschüre enthält die Aufgaben und Lösungen der Klassenstufe 7 bis 13, bei denen jeweils 30 Aufgaben zu lösen sind. Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer bekommt eine Startpunktzahl von 30 Punkten. Bei einer richtigen Antwort werden die vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzuaddiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen. So ist 0 die niedrigste mögliche Gesamtpunktzahl, und die erreichbare Höchstpunktzahl beträgt 150 Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack, P. Schmolke und A. Unger unter Mitwirkung von Dr. M. Akveld, B. Hell, B. und U. Hutschenreiter, Dr. M. Jarmer, D. Nikolenkov, Dr. A. Noack, A. Rupflin, A. Stahel, Dr. D. Vigerske und J. Züger erarbeitet.

Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

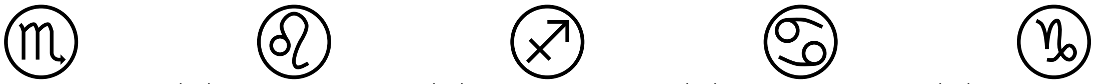
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

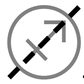
Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 7 und 8

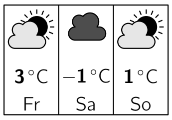
1. Welches der folgenden Symbole für Sternzeichen hat eine Symmetrieachse?

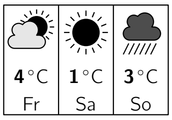


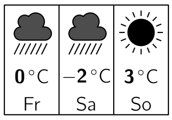
(**A**) Skorpion (**B**) Löwe (**C**) Schütze (**D**) Krebs (**E**) Steinbock

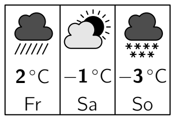
Lösung: Das Symbol für Schütze hat eine Symmetrieachse . Das Symbol für Krebs ist punktsymmetrisch, hat aber – wie auch die anderen Symbole – keine Symmetrieachse.

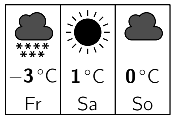
2. Benedikt schaut auf seine Wetter-App und bemerkt, dass die erwartete Höchsttemperatur in den nächsten drei Tagen von Tag zu Tag fällt. Was könnte Benedikts Wetter-App anzeigen?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: In den Anzeigen (**A**), (**B**) und (**C**) ist es für den Sonntag wärmer vorhergesagt als für den Samstag. In (**E**) ist es für den Samstag wärmer vorhergesagt als für den Freitag. Einzig in (**D**) fällt die erwartete Höchsttemperatur in den angezeigten drei Tagen von Tag zu Tag.

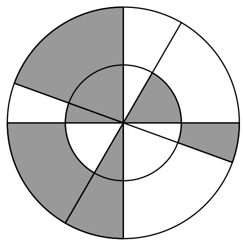
— In den Klassenstufen 9/10 und 11–13 gab es ein ähnliches Problem jeweils in Aufgabe 1. —

3. $\dfrac{20 \cdot 21}{2+0+2+1} =$

(**A**) 42 (**B**) 56 (**C**) 64 (**D**) 80 (**E**) 84

Lösung: Es ist $\dfrac{20 \cdot 21}{2+0+2+1} = \dfrac{20 \cdot 21}{5} = \dfrac{4 \cdot \cancel{5} \cdot 21}{\cancel{5}} = 4 \cdot 21 = 84.$

4. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt werden von vier Geraden durch den Mittelpunkt zerteilt. Wie viel Prozent der Fläche ist grau?



(**A**) 25 % (**B**) 40 % (**C**) 50 % (**D**) 60 % (**E**) 75 %

Lösung: Jede graue Teilfläche ist punktsymmetrisch zu einer weissen Teilfläche und umgekehrt. Also ist der graue Teil genauso gross wie der weisse Teil. Das heisst, 50 % der Gesamtfläche ist grau.

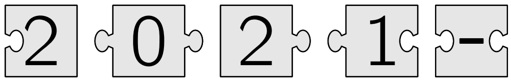
5. Mona und Remo wollen ihrer Mutter einen Strauss Rosen schenken. Sie wollen 15 Rosen kaufen, und zwar 4-mal so viele gelbe wie rote. Wie viele rote Rosen müssen in den Strauss gebunden werden?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Im Strauss sollen 4-mal so viele gelbe wie rote Rosen sein, also soll jede fünfte Rose rot sein. Das sind $15 : 5 = 3$ rote Rosen.

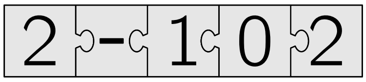
— Ein ähnliches, schwierigeres Problem wurde in Klassenstufe 11–13 in Aufgabe 11 gestellt. —

6. Wenn die fünf Puzzleteile korrekt zusammengefügt werden, ergibt sich ein Rechteck mit einer Rechenaufgabe. Was ist das Ergebnis dieser Rechenaufgabe?

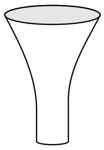
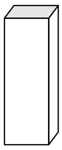
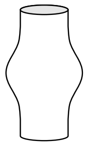
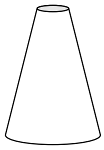
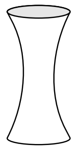


(**A**) -100 (**B**) -8 (**C**) -1 (**D**) 199 (**E**) 208

Lösung: Die beiden Teile mit einer 2 sind Randteile. An die linke 2 passt von den anderen Teilen nur das Minuszeichen und an die rechte 2 nur die 0. Demzufolge steht die 1 in der Mitte. Das Ergebnis der Rechenaufgabe ist $2 - 102 = -100$.

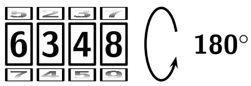


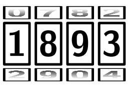
7. Jede der fünf Vasen hat dieselbe Höhe und lässt sich mit 1 Liter Wasser bis zum Rand füllen. Vivien füllt in jede Vase einen halben Liter Wasser. In welcher Vase steht das Wasser dann am höchsten?

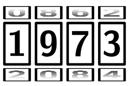
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

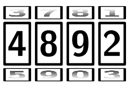
Lösung: Die Vasen (**B**), (**C**) und (**E**) sind symmetrisch zur Mitte der Höhe, und somit passt in die obere und in die untere Hälfte jeweils dieselbe Menge Wasser, das heisst, ein halber Liter. Ein halber Liter Wasser reicht bei diesen drei Vasen also genau bis zur Mitte. Vase (**D**) ist unten breiter als oben, bei ihr reicht der halbe Liter Wasser nicht einmal bis zur Mitte. Vase (**A**) ist unten schmaler als oben. Bis zur Mitte der Höhe passt in sie weniger Wasser als oberhalb der Mitte. Bei dieser Vase steht der halbe Liter Wasser also oberhalb der Mitte und somit am höchsten von allen fünf Vasen.

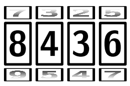
8. Ein Fahrradschloss hat vier Zahlenräder mit den Ziffern von 0 bis 9. Um die richtige Kombination zu erhalten, muss jedes der Zahlenräder der abgebildeten Einstellung um 180° gedreht werden. Wie sieht die richtige Kombination aus?

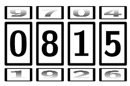


(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: Auf jedem Zahlenrad stehen 10 Ziffern. Wenn wir ein Zahlenrad um 180° drehen, also um die Hälfte einer vollen Umdrehung, so drehen wir um genau 5 Ziffern weiter. Aus der 6 wird eine 1, aus der 3 eine 8, aus der 4 eine 9 und aus der 8 eine 3. Die richtige Kombination ist 1893.

— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 8 gestellt. —

9. Im Südpolarmeer fand für die Pinguine ein Wetttauchen statt. Benno ist 5 s länger als Artur getaucht, aber 10 s kürzer als Curt. Dieter ist 10 s länger als Curt getaucht, aber 5 s kürzer als Egon. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(**A**) Artur und Egon sind gleich lange getaucht. (**B**) Artur ist 10 s länger als Egon getaucht.
(**C**) Artur ist 10 s kürzer als Egon getaucht. (**D**) Artur ist 30 s länger als Egon getaucht.
(**E**) Artur ist 30 s kürzer als Egon getaucht.

Lösung: Die Anfangsbuchstaben der Namen ergeben genau die Reihenfolge, die den Tauchzeiten entspricht, denn mit dem 1. Satz ergibt sich die Reihenfolge Artur, Benno, Curt (von kurz nach lang) und mit dem 2. Satz die Reihenfolge Curt, Dieter, Egon (ebenfalls von kurz nach lang). Somit ist die Reihenfolge der Pinguine entsprechend ihrer Tauchzeit Artur, Benno, Curt, Dieter, Egon, wobei Artur am kürzesten getaucht ist. Durch Aufsummieren der Zeitdifferenzen erhalten wir den Unterschied der Tauchzeiten von Artur und Egon: Artur ist $5\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{s}$ kürzer als Egon getaucht.

10. Die Buchstaben M, E, D und O stehen in beiden Rechnungen jeweils für dieselbe Ziffer. Was ist das Ergebnis der zweiten Rechnung?

$$\begin{array}{r} \mathbf{M\,E} \\ +\,\mathbf{D\,O} \\ \hline \mathbf{1\,3\,7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{M\,O\,D\,E} \\ +\,\mathbf{D\,E\,M\,O} \\ \hline \end{array}$$

(**A**) 14737 (**B**) 13837 (**C**) 14747 (**D**) 23737 (**E**) 137137

Lösung: Bei der schriftlichen Addition können wir Ziffern, die übereinander stehen, vertauschen, ohne das Ergebnis zu ändern. Vertauschen wir in der zweiten Rechnung das erste O mit dem E und das zweite D mit dem M, so stehen in beiden Summanden die Ziffern aus der ersten Rechnung zweimal hintereinander. Wir erhalten das Ergebnis, wie rechts abgebildet. Die Aufgabe lässt sich auch lösen, wenn man mithilfe der ersten Rechnung die Buchstaben durch geeignete Ziffern ersetzt.

$$\begin{array}{r} \mathbf{M\,E\,M\,E} \\ +\,\mathbf{D\,O\,D\,O} \\ \hline \mathbf{1\,3\,7\;\;\;\;\;} \\ \mathbf{1\,3\,7} \\ \hline \mathbf{1\,3\,8\,3\,7} \end{array}$$

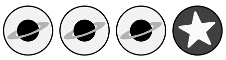
11. Eine rechteckige Tafel Schokolade besteht aus gleich grossen, quadratischen Stückchen. Nico bricht sich eine Reihe mit 5 Stückchen ab. Danach bricht sich Janina vom Rest zwei Reihen mit insgesamt 6 Stückchen ab. Wie viele Stückchen sind noch übrig?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Nachdem sich Nico eine Reihe mit 5 Stückchen abgebrochen hat, verbleibt ein Rest, der 5 Stückchen lang ist. Danach bricht sich Janina 2 Reihen mit jeweils 3 Stückchen ab, also war der Rest 3 Stückchen breit. Der verbleibende Rest ist nun 3 Stückchen breit und $5 - 2 = 3$ Stückchen lang, da 2 Reihen abgebrochen wurden. Es sind also noch $3 \cdot 3 = 9$ Stückchen übrig. Das Bild zeigt die Tafel Schokolade mit den Stückchen, die Nico (N) und Janina (J) jeweils abgebrochen haben.

N	N	N	N	N
			J	J
			J	J
			J	J

12. Fünf Freunde sammeln drei Sorten Astro-Anstecker: Planeten , Monde  und Sterne . Kathryns Anstecker sind zur Hälfte Planeten. Chris hat mehr Monde als Sterne. Philippa hat keine Monde. James hat eine gerade Anzahl von Ansteckern. Jean-Luc hat mehr Sterne als Planeten. Die folgenden Bilder zeigen die Anstecker der fünf Freunde. Welche Anstecker gehören Jean-Luc?

(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

Lösung: Kathryns Anstecker sind zur Hälfte Planeten, das trifft nur auf (**C**) zu. Chris hat mehr Monde als Sterne, das trifft von den verbliebenen Sammlungen nur auf (**D**) zu. James hat eine gerade Anzahl von Ansteckern, das ist bei den verbliebenen Sammlungen nur bei (**A**) der Fall. Von den beiden nun verbliebenen Sammlungen enthält nur (**B**) keine Monde und gehört folglich zu Philippa. Jean-Lucs Anstecker sind bei (**E**) zu sehen.

13. Wenn zwei Ziffern der Zahl 337337 gestrichen werden, bilden die restlichen vier Ziffern (in derselben Reihenfolge) eine vierstellige Zahl. Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen können so entstehen?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wir schreiben die vierstelligen Zahlen, die entstehen können, systematisch auf und unterscheiden dabei danach, welche der Siebenen gestrichen werden. Wir müssen beachten, dass in einigen Fällen das Streichen von verschiedenen Dreien zur selben Zahl führt.

beide Siebenen:	3333		
nur die vordere Sieben:	3337		
nur die hintere Sieben:	3373	3733	
keine Sieben:	7337	3737	3377

Es können 7 verschiedene vierstellige Zahlen entstehen.

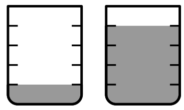
14. Aus 25 Holzbrettern, jedes 20 cm breit, baut Ricarda einen Zaun. Der Zaun soll 4,40 m lang werden. Dabei sollen sich die Bretter wie abgebildet immer um dieselbe Breite überlappen.

Wie breit muss die Überlappung jeweils sein, damit der Zaun die gewünschte Länge hat?

(**A**) 2,5 cm (**B**) 2,8 cm (**C**) 3 cm (**D**) 4,7 cm (**E**) 5 cm

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass sich die 25 Bretter an 24 Stellen überlappen. Würden wir die 25 Bretter ohne Überlappung aneinanderfügen, so wäre der Zaun $25 \cdot 20\,\text{cm} = 500\,\text{cm} = 5{,}00\,\text{m}$ lang. Durch die 24 Überlappungen müssen insgesamt $5{,}00\,\text{m} - 4{,}40\,\text{m} = 60\,\text{cm}$ eingespart werden. Also ist jede Überlappung $60\,\text{cm} : 24 = 2{,}5\,\text{cm}$ breit.

15. Ein Glas, das zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist, wiegt 360 g. Wird dasselbe Glas zu vier Fünfteln mit Wasser gefüllt, so wiegt es 540 g. Wie viel wiegt das leere Glas?

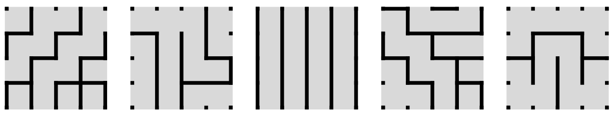


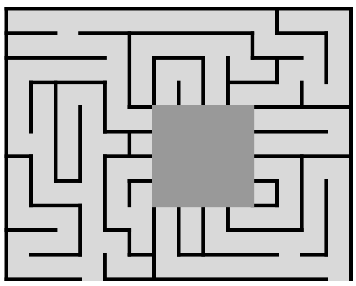
360 g 540 g

(**A**) 100 g (**B**) 120 g (**C**) 180 g (**D**) 250 g (**E**) 300 g

Lösung: Wenn wir aus dem volleren Glas, das zu vier Fünfteln mit Wasser gefüllt ist, drei Fünftel wegschütten, erhalten wir das leerere Glas, das zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Also entsprechen die drei Fünftel Wasser der Differenz $540\,\text{g} - 360\,\text{g} = 180\,\text{g}$. Das verbliebene eine Fünftel Wasser entspricht damit $180\,\text{g} : 3 = 60\,\text{g}$. Schütten wir dieses aus, bleibt das leere Glas mit $360\,\text{g} - 60\,\text{g} = 300\,\text{g}$ übrig.

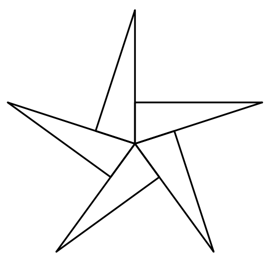
In dem rechts abgebildetem Labyrinth fehlt ein Teil. Welches der folgenden Teile (ohne es zu drehen) vervollständigt das Labyrinth so, dass es einen Weg von A *nach* B *gibt?*





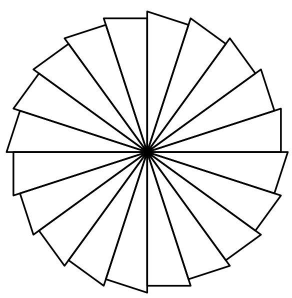
A B

16. Fünf identische rechtwinklige Dreiecke können so angeordnet werden, dass die grösseren spitzen Winkel in der Mitte aneinanderstossen und den abgebildeten Stern bilden. Es ist auch möglich, eine grössere Anzahl dieser Dreiecke so anzuordnen, dass jeweils die kleineren spitzen Winkel in der Mitte aneinanderstossen. Wie viele Dreiecke sind dafür nötig?



(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 24

Lösung: Im Stern, der in der Aufgabe abgebildet ist, treffen in der Mitte 5 der grösseren spitzen Winkel zusammen, also muss der grössere spitze Winkel jeweils $360° : 5 = 72°$ gross sein. Der kleinere spitze Winkel ist folglich $180° - 90° - 72° = 18°$ gross. Da $360° : 18° = 20$ ist, lassen sich 20 dieser Dreiecke mit den kleineren spitzen Winkeln in der Mitte zusammenlegen. Es entsteht die rechts abgebildete Figur.



17. Beim Koala-Wettbewerb werden 20 Fragen gestellt. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 7 Punkte und für jede falsch beantwortete -4 Punkte. Für unbeantwortete Fragen gibt es 0 Punkte. Ava hat genau 100 Punkte erreicht. Wie viele Fragen hat sie nicht beantwortet?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

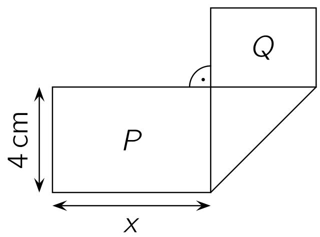
Lösung: Die Punktzahl für jede falsche Antwort ist gerade, und die Punktzahl für jede richtige Antwort ist ungerade. Da Avas Gesamtpunktzahl 100 gerade ist, hat sie eine gerade Anzahl an Pluspunkten erhalten. Also ist die Anzahl der richtigen Antworten gerade. Ausserdem muss sie mehr als 14 Fragen richtig beantwortet haben, denn $14 \cdot 7 = 98 < 100$. Hätte sie jedoch mindestens 18 Fragen richtig beantwortet, so hätte sie mindestens $18 \cdot 7 + 2 \cdot (-4) = 118$ Punkte bekommen, also zu viele. Ava hat also 16 Fragen richtig beantwortet, wofür sie $16 \cdot 7 = 112$ Punkte bekam. Folglich hat sie $(112 - 100) : 4 = 3$ Fragen falsch beantwortet. Eine Aufgabe hat sie nicht beantwortet.

Was ist die Maximalpunktzahl, die bei dem in Aufgabe 17 beschriebenen Wettbewerb erreicht werden kann?

Nicht alle Zahlen, die kleiner als die Maximalpunktzahl sind, können auch tatsächlich als Gesamtpunktzahl erreicht werden.

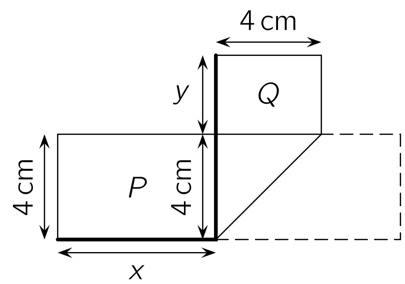
Welches ist die kleinste positive Zahl, die nicht als Gesamtpunktzahl in Frage kommt?

18. Ein rechteckiger Streifen Papier, 13 cm lang und 4 cm breit, wurde einmal gefaltet (siehe Bild). Die dabei entstandenen Rechtecke haben die Flächeninhalte P und Q, wobei P doppelt so gross wie Q ist. Wie gross ist x?



(**A**) 5 cm (**B**) 5,5 cm (**C**) 6 cm (**D**) 6,5 cm (**E**) 7 cm

Lösung: Wir zeichnen in das Bild den ursprünglichen Papierstreifen ein. Wir sehen, dass die kurze Seite des Streifens jeweils so lang wie eine Seitenlänge der Rechtecke ist. Die gesamte Länge des Streifens lässt sich in die beiden Seitenlängen x und y der Rechtecke aufteilen und in die Länge der Überlappung, die der Länge der kurzen Seite des Papierstreifens entspricht. Also ist $13\,\text{cm} = x + y + 4\,\text{cm}$. Da $P = 2Q$ ist und beide Rechtecke eine Seite haben, die 4 cm lang ist, folgt $x = 2y$ und somit $y = 0{,}5x$. Einsetzen in die erste Gleichung führt zu $9\,\text{cm} = 1{,}5x$. Damit ist $x = 9\,\text{cm} : 1{,}5 = 6\,\text{cm}$.

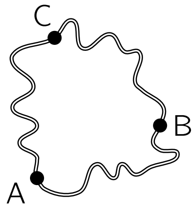


19. In unserem Angelverein sind 25 Profis und 51 Amateure. Für das Paarangeln wurden sie in Paare aufgeteilt. Wenn ein Amateur und ein Profi zusammen angeln mussten, waren beide Angler unglücklich. In allen anderen Paaren waren beide Angler glücklich. Nach dem Angeln gaben 58 Angler an, glücklich mit ihrem Partner gewesen zu sein, der Rest war es nicht. Wie viele reine Amateurpaare gab es?

(**A**) 15 (**B**) 17 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 24

Lösung: Am Paarangeln nahmen insgesamt $25 + 51 = 76$ Angler teil. Davon waren 58 glücklich und folglich $76 - 58 = 18$ unglücklich. Also gab es 9 gemischte Paare mit 9 Amateuren (und 9 Profis). Die restlichen $51 - 9 = 42$ Amateure waren in reinen Amateurpaaren, das waren demzufolge 21 Paare.

20. Drei Dörfer sind durch Wanderwege verbunden. Der direkte Weg von A nach C ist 1 km kürzer als der Umweg über B. Der direkte Weg von A nach B ist 5 km kürzer als der Umweg über C. Der direkte Weg von B nach C ist 7 km kürzer als der Umweg über A. Wie lang ist der kürzeste der drei direkten Wege zwischen den Dörfern?



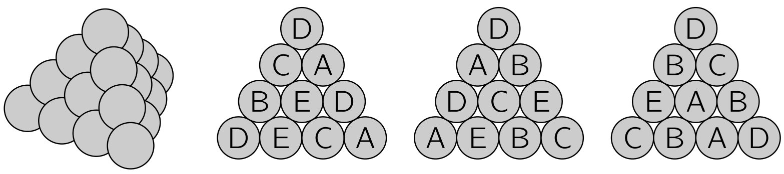
(**A**) 1 km (**B**) 2 km (**C**) 3 km (**D**) 4 km (**E**) 5 km

Lösung: Würden wir jeden Umweg einmal laufen, dann wäre das so, als würden wir jeden direkten Weg zweimal gehen. Ausserdem wären das insgesamt $1\,\text{km} + 5\,\text{km} + 7\,\text{km} = 13\,\text{km}$ mehr, als würden wir die direkten Wege, also jeden einmal, nehmen. Also entsprechen die 13 km genau der Summe der Längen der direkten Wege. Daraus folgt, dass zum kürzesten der direkten Wege der längste Umweg und insbesondere der grösste Unterschied zwischen Umweg und direktem Weg gehört, also 7 km. Der kürzeste direkte Weg ist also zwischen B und C.
Nun können wir uns vorstellen, dass wir in B starten und zuerst den Umweg über A nach C nehmen und dann auf direktem Weg zurück nach B gehen. Dann gehen wir zuerst die Länge des Umwegs, also die des direkten Wegs und zusätzlich 7 km (das ist zusammen genau die Länge des Umwegs), und anschliessend noch einmal die Länge des direkten Wegs. Insgesamt sind das 13 km, und der direkte Weg von B nach C ist folglich $(13\,\text{km} - 7\,\text{km}) : 2 = 3\,\text{km}$ lang.
Die anderen Wegstrecken lassen sich analog als 4 km und 6 km bestimmen.
Wer schon mit Gleichungen umgehen kann, kann die Aufgabe auch so lösen: Wir bezeichnen die Längen der direkten Wege mit a, b und c, stellen mit den gegebenen Bedingungen drei Gleichungen auf und lösen das entstehende Gleichungssystem.

Sandy schreibt die Jahreszahl 2021 als Summe von fünf natürlichen Zahlen, deren Ziffern nur Fünfen und Neunen sind.

Wie viele Neunen verwendet Sandy insgesamt für die fünf Summanden?

21. Im Pralinenladen ist eine dreiseitige Pyramide aus 20 runden Trüffeln aufgebaut, je 4 Stück von 5 Sorten. Im Bild ist für jede Seitenfläche angegeben, zu welcher Sorte die Trüffel gehören. Von welcher Sorte ist der von aussen nicht sichtbare Trüffel, der in der Mitte der Grundfläche liegt?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

Lösung: Der Trüffel an der Spitze ist in den drei Seitenansichten insgesamt dreimal zu sehen und die Trüffel an den drei Kanten der Pyramide jeweils zweimal. Also können wir in den Bildern zweimal das D an der Spitze und immer je eine der beiden gleichen Kanten streichen. Zählen wir nun die verbliebenen Trüffel pro Sorte, erhalten wir für D nur 3 Exemplare. Unten in der Mitte der Grundfläche liegt also der vierte Trüffel von der Sorte D.

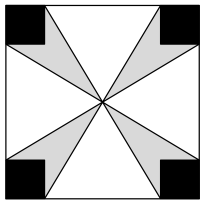
Wer findet 8 ganze Zahlen (es müssen nicht alle verschieden sein), deren Summe und auch deren Produkt jeweils gleich 8 ist?

22. Franziska und Sergej teilen 22 Äpfel und 11 Birnen so auf, dass Franziska genau doppelt so viele Früchte wie Sergej bekommt. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?

(**A**) Franziska bekommt mindestens eine Birne.
(**B**) Franziska bekommt doppelt so viele Äpfel wie Birnen.
(**C**) Franziska bekommt doppelt so viele Äpfel wie Sergej.
(**D**) Franziska bekommt genauso viele Äpfel wie Sergej Birnen.
(**E**) Franziska bekommt genauso viele Birnen wie Sergej Äpfel.

Lösung: Dass (**A**) nicht gelten muss, sehen wir schnell, denn Franziska könnte alle 22 Äpfel und keine Birne bekommen haben. Mit dieser Aufteilung sehen wir, dass auch (**B**), (**C**) und (**D**) nicht unbedingt gelten müssen. Nur (**E**) kommt damit als Lösung in Frage.
Dass das auch tatsächlich stets der Fall ist, sehen wir so: Es sind insgesamt 33 Früchte vorhanden, die im Verhältnis 2 : 1 aufgeteilt werden sollen. Franziska bekommt also 22 Früchte und Sergej 11. Wir nehmen an, dass Franziska b Birnen bekommt. Dann muss sie $22-b$ Äpfel bekommen, damit sie insgesamt 22 Früchte hat. Die restlichen Birnen und Äpfel gehen an Sergej, also $11-b$ Birnen und $22-(22-b)=b$ Äpfel. Franziska bekommt demzufolge sicher genauso viele Birnen wie Sergej Äpfel.

23. Der Flächeninhalt des grossen Quadrats im Bild beträgt $25\,\text{cm}^2$. Jedes der kleinen schwarzen Quadrate ist $1\,\text{cm}^2$ gross. Welchen Flächeninhalt haben die vier grauen Bereiche zusammen?



(**A**) $6\,\text{cm}^2$ (**B**) $6{,}5\,\text{cm}^2$ (**C**) $7\,\text{cm}^2$ (**D**) $7{,}5\,\text{cm}^2$ (**E**) $8\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir berechnen den Flächeninhalt der grauen Fläche, indem wir den Flächeninhalt der weissen und der schwarzen Fläche vom Flächeninhalt des grossen Quadrats abziehen.
Die vier weissen Dreiecke sind zueinander kongruent. Als Grundseite haben sie eine lange Quadratseite vermindert um zwei kleine Quadratseiten. Die Grundseite ist also $5\,\text{cm} - 2\cdot 1\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ lang. Die dazugehörige Höhe ist halb so lang wie die lange Quadratseite, das sind $5\,\text{cm} : 2 = 2{,}5\,\text{cm}$. Die vier weissen Dreiecke sind also zusammen $4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\,\text{cm}\cdot 2{,}5\,\text{cm} = 15\,\text{cm}^2$ gross. Die vier grauen Bereiche haben zusammen einen Flächeninhalt von $25\,\text{cm}^2 - 15\,\text{cm}^2 - 4\cdot 1\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.
Der Flächeninhalt der grauen Bereiche lässt sich auch direkt berechnen, indem wir jedes graue Viereck durch eine Diagonale halbieren. Wählen wir für jedes dabei entstehende graue Dreieck als Grundseite die Seite des schwarzen Quadrats, so ist die zugehörige Höhe 1,5 cm lang. Die vier grauen Bereiche haben somit zusammen einen Flächeninhalt von $8\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\,\text{cm}\cdot 1{,}5\,\text{cm}\right) = 4\cdot 1{,}5\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.

24. Multiplizieren wir die 6-stellige Zahl $1ABCDE$ mit 3, so erhalten wir als Ergebnis die 6-stellige Zahl $ABCDE1$. Welchen Wert hat $A+B+C+D+E$?

(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 29 (**D**) 32 (**E**) 35

$$\begin{array}{r} 1\;A\;B\;C\;D\;E\cdot 3 \\ \hline A\;B\;C\;D\;E\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\;A\;B\;C\;D\;7\cdot 3 \\ \hline A\;B\;C\;D\;7\;1 \end{array}$$

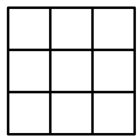
Lösung: Wir ermitteln die Ziffern der sechsstelligen Zahl $1ABCDE$ und beginnen bei E. Da $E\cdot 3$ auf 1 endet, muss $E=7$ sein.
Da $7\cdot 3=21$ ist, gibt es einen Übertrag 2. Also endet $D\cdot 3+2$ auf 7. Das ist nur für $D=5$ möglich.
Analog berechnen wir nacheinander $C=8$, $B=2$ und schliesslich $A=4$.
Tatsächlich gilt $142857\cdot 3=428571$, und wir erhalten $A+B+C+D+E=4+2+8+5+7=26$.
Wir geben noch eine Lösungsvariante an: Wenn wir die Zahl $ABCDE$ mit x bezeichnen, können wir die Bedingung aus der Aufgabe als Gleichung $(100000+x)\cdot 3=10x+1$ schreiben. Auflösen nach x führt über $300000+3x=10x+1$ zu $x=299999:7=42857$.

25. Eine Box enthält nur grüne, rote, schwarze und blaue Chips. Nehme ich 27 Chips aus der Box, so ist mindestens ein grüner dabei. Nehme ich 25 Chips aus der Box, so ist mindestens ein roter dabei. Nehme ich 22 Chips aus der Box, so ist mindestens ein schwarzer dabei. Nehme ich 17 Chips aus der Box, so ist mindestens ein blauer dabei. Wie viele Chips sind höchstens in der Box?

(**A**) 27 (**B**) 29 (**C**) 51 (**D**) 87 (**E**) 91

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der grünen, roten, schwarzen und blauen Chips mit g, r, s und b. Da bei 27 Chips mindestens ein grüner dabei ist, können es höchstens 26 Chips sein, die nicht grün, also rot, schwarz oder blau sind, das heisst $r+s+b \leq 26$. Analog erhalten wir die Ungleichungen $g+s+b \leq 24$, $g+r+b \leq 21$ und $g+r+s \leq 16$. Addieren wir die vier Ungleichungen, so erhalten wir nach Umsortieren und Ausklammern $3 \cdot (g+b+r+s) \leq 87$ und damit $g+b+r+s \leq 29$. Es können nicht mehr als 29 Chips in der Box sein.
Bei 29 Chips werden alle Ungleichungen zu Gleichungen und wir können ausrechnen, dass es dann 3 grüne, 5 rote, 8 schwarze und 13 blaue Chips sein müssen. Mit diesen Anzahlen sind alle gegebenen Bedingungen erfüllt.

Auf die 9 Felder sollen 8 Münzen so verteilt werden, dass in jeder Reihe (senkrecht und waagerecht) eine andere Gesamtzahl an Münzen liegt. Wer findet mehrere Möglichkeiten?



26. Die Oberfläche des abgebildeten Fussballs besteht aus schwarzen Fünfecken und weissen Sechsecken, die regelmässig angeordnet sind. Es sind insgesamt 12 Fünfecke. Wie viele Sechsecke sind es?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 24

Lösung: Zu jedem Fünfeck gehören 5 Kanten des Fussballs. Es gibt also insgesamt $12 \cdot 5 = 60$ Kanten, die zu einem Fünfeck gehören. Zu jedem Sechseck gehören 3 Kanten, die gleichzeitig auch zu einem Fünfeck gehören. Also sind es $60 : 3 = 20$ Sechsecke.

— In der ähnlichen Aufgabe 26 in Klassenstufe 11–13 war ein anderer Körper zu untersuchen. —

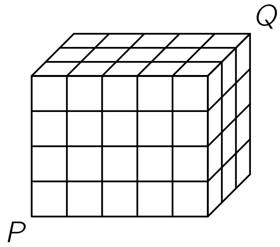
27. In einer Fabrik werden Eier mit den Farben rot, blau und gelb bemalt. Unter 3 aufeinanderfolgenden Eiern soll jede Farbe einmal vorkommen. Bei der Qualitätskontrolle wird notiert: „Ei 2 ist gelb, Ei 20 ist gelb, Ei 202 ist rot, Ei 1002 ist blau und Ei 2021 ist blau.“ Die Chefin bemerkt sofort, dass genau eines dieser fünf Eier falsch gefärbt ist. Welche Nummer hat das falsch gefärbte Ei?

(**A**) 2 (**B**) 20 (**C**) 202 (**D**) 1002 (**E**) 2021

Lösung: Da unter 3 aufeinanderfolgenden Eiern jede Farbe einmal vorkommen soll, muss das 1. Ei dieselbe Farbe haben wie das 4., 7., 10., usw., das 2. Ei dieselbe Farbe wie das 5., 8., 11., usw. und das 3. Ei dieselbe Farbe wie das 6., 9., 12., usw. Eier, deren Nummern beim Teilen durch 3 denselben Rest lassen, sollen also dieselbe Farbe haben. Die Nummern 2, 20 und 2021 lassen beim Teilen durch 3 jeweils den Rest 2. Während Ei 2 und Ei 20 gelb sind, ist Ei 2021 blau. Da nur genau eines der fünf Eier falsch gefärbt ist, muss es das Ei 2021 sein. Es hätte gelb gefärbt werden müssen.
Da beim Teilen durch 3 die Zahl 202 den Rest 1 und die Zahl 1002 den Rest 0 lässt, sind die Eier 202 und 1002 richtigerweise anders gefärbt als die Eier 2 und 20.

— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 9/10 in Aufgabe 29 gestellt. —

28. Ein $3 \times 4 \times 5$-Quader besteht aus 60 identischen kleinen Holzwürfeln. Holzwurm Willy frisst sich entlang der Raumdiagonalen von P nach Q. Diese Raumdiagonale schneidet im Inneren des Quaders keine Kante der kleinen Würfel. Durch wie viele kleine Würfel verläuft der Weg von Holzwurm Willy?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

Lösung: Jedes Mal, wenn die Raumdiagonale von P nach Q auf eine Seitenfläche eines kleinen Würfels trifft, verlässt Willy einen Würfel und frisst sich in einen neuen Würfel. Da die Raumdiagonale im Inneren des Quaders keine Kante der kleinen Würfel schneidet, frisst sich Willi, immer wenn er einen Würfel verlässt, als nächstes entweder in den Würfel rechts daneben, in den darüber oder in den dahinter. Da der Quader 5 Würfel breit ist, frisst sich Willy 4-mal in den Würfel rechts daneben. Da der Quader 4 Würfel hoch ist, frisst er sich 3-mal in den Würfel darüber. Und da der Quader 3 Würfel tief ist, frisst er sich 2-mal in den Würfel dahinter.
Holzwurm Willy frisst sich also im Inneren $4+3+2=9$-mal in einen neuen Würfel. Dazu kommt der erste Würfel, bei dem Willy startet. Insgesamt verläuft Willys Weg also durch 10 kleine Würfel.

29. Bei einem Turnier spielt jedes der sechs Teams gegen jedes andere Team genau einmal. An jedem Spieltag finden drei Spiele gleichzeitig statt. Ein TV-Sender hat für jeden Spieltag ein Spiel festgelegt, das live übertragen werden soll (siehe Tabelle). An welchem Spieltag wird D gegen F spielen?

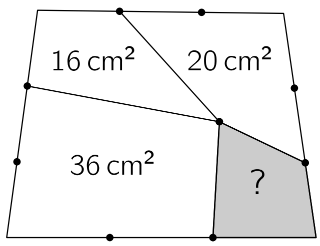
1	2	3	4	5
C – D	A – E	E – F	A – B	A – C

(**A**) am 1. (**B**) am 2. (**C**) am 3. (**D**) am 4. (**E**) am 5.

Lösung: Von Mannschaft A ergänzen wir in der Tabelle die Spiele gegen D und F an den Spieltagen 1 und 3. Da am 1. Spieltag bereits D gegen C spielt, muss am 1. Spieltag A – F stattfinden sowie mit den noch fehlenden Teams B – E. Am 3. Spieltag finden demzufolge A – D und B – C statt. Von Mannschaft C müssen wir noch die Spiele gegen E und F an den Spieltagen 2 und 4 finden. Da am 2. Spieltag bereits E gegen A spielt, muss C – E am 4. Spieltag stattfinden und damit auch D – F am 4. Spieltag. Die vollständige Tabelle ist abgebildet.

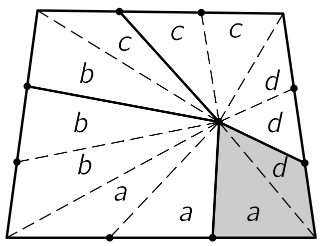
1	2	3	4	5
C – D	A – E	E – F	A – B	A – C
A – F	C – F	A – D	C – E	B – F
B – E	B – D	B – C	**D – F**	D – E

30. Die Seiten des abgebildeten Vierecks wurden gedrittelt und pro Seite wurde einer der Teilungspunkte wie abgebildet mit einem Punkt im Inneren verbunden. Dadurch wurde das Viereck in vier kleinere Vierecke zerlegt. Die Zahlen in den Vierecken geben an, welchen Flächeninhalt das jeweilige Viereck hat. Welchen Flächeninhalt hat das graue Viereck?



(**A**) $11\,\text{cm}^2$ (**B**) $12\,\text{cm}^2$ (**C**) $13\,\text{cm}^2$ (**D**) $14\,\text{cm}^2$ (**E**) $15\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir verbinden den Punkt im Inneren mit den Teilungspunkten und den Eckpunkten des grossen Vierecks. Die drei zu einer Vierecksseite gehörenden Dreiecke sind jeweils gleich gross, denn ihre Grundseiten sind gleich lang (jede Vierecksseite wurde gedrittelt) und die entsprechende Höhe ist jeweils dieselbe. Die Flächeninhalte der Dreiecke bezeichnen wir wie im Bild angegeben.

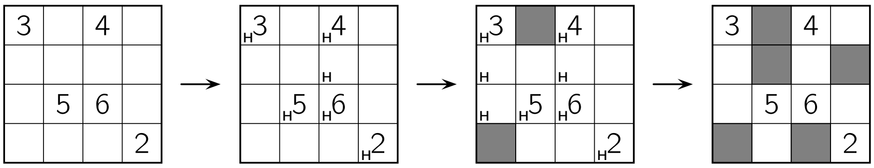


Wir berechnen die Summe $a+b+c+d$, indem wir die Flächeninhalte der beiden Vierecke unten links und oben rechts addieren. Wir erhalten $36\,\text{cm}^2 + 20\,\text{cm}^2 = 2a+2b+2c+2d$, woraus $a+b+c+d = 28\,\text{cm}^2$ folgt. Weil für das Viereck oben links $b+c = 16\,\text{cm}^2$ gilt, ist der gesuchte Flächeninhalt $a+d = 28\,\text{cm}^2 - 16\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$.

Höhlenrätsel

In den Diagrammen sind einige der Felder schwarz auszumalen. Das sind die Wände einer Höhle, die von den weissen Feldern gebildet wird. Es gelten die folgenden Regeln:

1. Jede Höhle ist zusammenhängend, das heisst, alle weissen Felder sind senkrecht und/oder waagerecht miteinander verbunden.
2. Die weisse Fläche darf kein schwarzes Gebiet umschliessen. Mit anderen Worten: Jedes schwarze Gebiet hat eine Verbindung zum Rand.
3. Es gibt keinen 2×2-Bereich, der vollständig weiss oder vollständig schwarz ist.
4. Felder mit Zahlen bleiben weiss und gehören zur Höhle. Jede Zahl gibt an, wie viele weisse Felder von diesem Feld aus in senkrechter und waagerechter Richtung (einschliesslich des Feldes selbst) insgesamt zu sehen sind.



Im Beispiel rechts finden wir zuerst, dass das Feld über der 6 zur Höhle (H) gehört, da sonst von der 6 aus nicht 6 Felder zu sehen sein können. Dann ist der Rest schnell ausgefüllt, wobei es hier genügt, die Regeln 3 und 4 zu beachten.

Wer findet die richtigen Höhlen in den folgenden Diagrammen?

2			2	
		7		
			3	
3				
			3	

	2			5
5				
3		5		
3				5

9				5
			3	
				7

			4	
2	5			
				6
	6			

5				5
		5		
				5
	5			5

4			8	
				2
7				

			8		
4		5		6	
					2
6					
					2

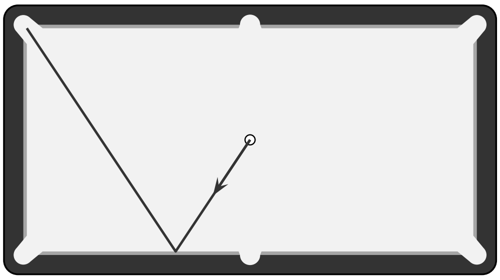
4			3			
	2					
			5		3	
5						3
	2			2		

			4		4		
				5			
							7
							3
9							
							4
	2						

Billard: ganz normal …

Beim Billard ist es das Ziel, Kugeln mit Hilfe eines Spielstocks, dem *Queue*, in die Lochtaschen, die sich in den Ecken und in den Mitten der langen Seiten des rechteckigen Billardtischs befinden, zu „lochen“. Bei einem Billardtisch sind die langen Seiten genau doppelt so lang wie die kurzen.

1 Stellen wir uns vor, dass in der Mitte des Tischs eine weisse Kugel liegt. Das Bild zeigt, wie die Kugel gestossen werden kann, damit sie „über eine Bande“ in die Lochtasche oben links fällt.

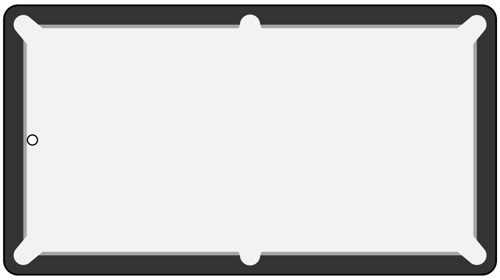


Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, die Kugel über eine Bande in diese Lochtasche zu lochen. Wer findet diese zweite Möglichkeit?

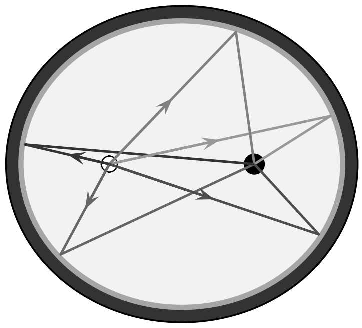
Wie gelingt es, die Kugel über zwei Banden in diese Lochtasche zu lochen? Wer findet dafür die beiden Möglichkeiten?

Es gibt mehr als zwei Möglichkeiten, die Kugel über drei Banden in diese Lochtasche zu lochen. Wer findet sie alle?

2 Stellen wir uns nun vor, dass die weisse Kugel in der Mitte der linken Bande liegt. Sie soll so gestossen werden, dass sie über die drei anderen Banden, erst oben, dann rechts und dann unten, ohne weitere Bandenberührungen zurück zu irgendeinem Punkt an der linken Bande gelangt. In welchem Bereich muss die obere Bande dafür getroffen werden?

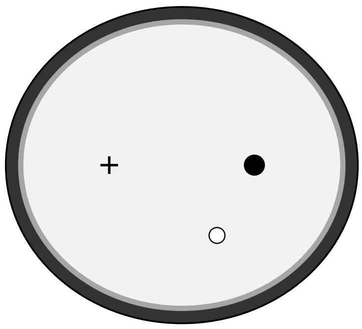


… oder mal anders!



3 Stellen wir uns einen Billardtisch in Form einer Ellipse vor. Eine Ellipse besteht aus allen Punkten, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, den sogenannten Brennpunkten, gleich ist. Wenn wir zweimal denselben Punkt als Brennpunkt wählen, erhalten wir eine bekannte Figur als spezielle Ellipse, nämlich einen Kreis.

Unser ellipsenförmiger Billardtisch (also eine „echte“ Ellipse) habe ein Loch im rechten Brennpunkt. Der linke Brennpunkt ist mit einem Kreuz markiert. Dieser Billardtisch hat die folgende faszinierende Eigenschaft:



Liegt eine Kugel auf dem Kreuz und wird irgendwo gegen die Bande gestossen, dann wird sie so reflektiert, dass sie danach direkt in das Loch fällt (siehe oberes Bild).

Im unteren Bild liegt die weisse Kugel nicht auf dem Kreuz.

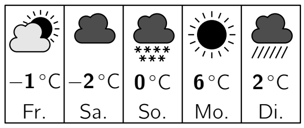
In welche Richtung muss die weisse Kugel gestossen werden, damit sie nach genau einer Bandenberührung in das Loch fällt? Wer findet beide Möglichkeiten?

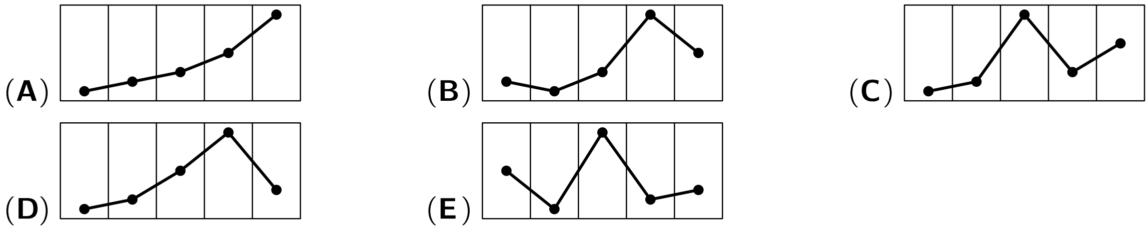
Wer findet eine Möglichkeit, die weisse Kugel über zwei Banden zu lochen?

Videos mit Erklärungen (auf englisch) und einer Spielvariante auf einem echten ellipsenförmigen Billardtisch finden sich hier: www.loop-the-game.com

Klassenstufen 9 und 10

1. Die Wetter-App auf Jennys Handy zeigt die zu erwartenden Höchsttemperaturen der nächsten fünf Tage an. Wie sieht der dazugehörige Graph aus?





Lösung: Die auffallend höchste Temperatur ist für den Montag angesagt. Folglich kann nur (**B**) oder (**D**) der gesuchte Graph sein. Das Absinken der Temperatur vom Freitag zum Samstag wird von diesen beiden Graphen nur bei (**B**) dargestellt. Also ist (**B**) der zu Jennys Anzeige gehörende Graph.

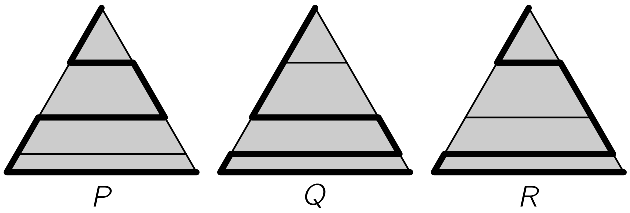
— In den Klassenstufen 7/8 und 11–13 gab es ein ähnliches Problem in Aufgabe 2 bzw. 1. —

2. Welche der folgenden Rechnungen hat das grösste Ergebnis?

(**A**) $202 \cdot 1$ (**B**) 202^1 (**C**) $2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1$ (**D**) $20 \cdot 21$ (**E**) $20 \cdot 2 \cdot 1$

Lösung: Die Rechnungen mit den Ziffern der Jahreszahl lassen sich gut im Kopf durchführen, die Ergebnisse sind bei (**A**) 202, bei (**B**) 202, bei (**C**) 0, bei (**D**) 420 und bei (**E**) 40. (**D**) ist die Lösung.

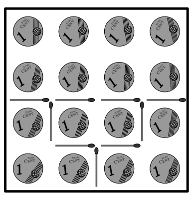
3. Von oben sieht unser Stadtpark wie ein gleichseitiges Dreieck aus. Die vier Querwege im Park sind zueinander parallel. Im Reiseführer sind drei Routen durch den Park empfohlen und mit dicken Linien markiert. Sie haben die Längen P, Q und R. Welche Aussage trifft zu?



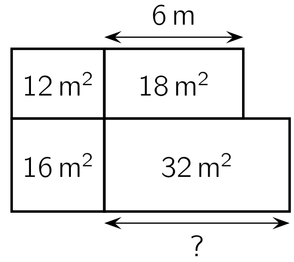
(**A**) $P < R < Q$ (**B**) $P < Q < R$ (**C**) $P < Q = R$ (**D**) $P = R < Q$ (**E**) $P = Q = R$

Lösung: Für jede Route durch den Stadtpark ergänzen sich die Längen der Wegabschnitte am rechten und linken Parkrand zur Länge einer Dreiecksseite des Parks. Die Längen der drei Routen unterscheiden sich darin, welche Querwege benutzt werden. Diese werden von oben nach unten länger, also ist (**A**) $P < R < Q$ richtig.

In der Figur rechts sind genau 2 Streichhölzchen so umzulegen, dass es anschliessend 3 Bereiche gibt, und zwar zwei mit jeweils 6 Münzen und einen mit 4 Münzen.



4. Jureks Grossvater überlegt, wie viel Samen er für seine Kräuter- und Gemüsebeete benötigt. Dafür hat sich der Grossvater für jedes der rechteckigen Beete den Flächeninhalt notiert. Das Beet oben rechts ist 6 m lang. Wie lang ist das Beet unten rechts?



(**A**) 7 m (**B**) 7,5 m (**C**) 8 m (**D**) 8,5 m (**E**) 9 m

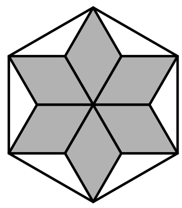
Lösung: Vom Beet oben rechts in der Zeichnung ist eine Seitenlänge und der Flächeninhalt bekannt. Daraus erhalten wir die Länge der zweiten Seite: $18\,\text{m}^2 : 6\,\text{m} = 3\,\text{m}$. Da dies gleichzeitig die Seitenlänge des Beets oben links ist, finden wir dessen zweite Seitenlänge analog: $12\,\text{m}^2 : 3\,\text{m} = 4\,\text{m}$. Dies ist auch eine Seitenlänge des Beets unten links, für dessen zweite Seitenlänge $16\,\text{m}^2 : 4\,\text{m} = 4\,\text{m}$ folgt. Und dies ist wiederum eine Seitenlänge des Beets unten rechts, woraus wir $32\,\text{m}^2 : 4\,\text{m} = 8\,\text{m}$ als die gesuchte Seitenlänge dieses Beets erhalten.

5. Bei einem Handballspiel führte das Heimteam zur Halbzeitpause 14 : 9. In der 2. Halbzeit wurde das Auswärtsteam besser und erzielte doppelt so viele Tore wie das Heimteam. Am Ende gewann das Auswärtsteam mit einem Tor Vorsprung. Wie war der Endstand?

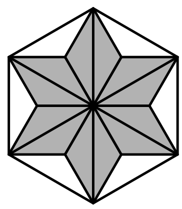
(**A**) 23 : 24 (**B**) 22 : 23 (**C**) 21 : 22 (**D**) 20 : 21 (**E**) 19 : 20

Lösung: Das Auswärtsteam erzielte in der 1. Halbzeit 5 Tore weniger als das Heimteam. Um am Ende ein Tor Vorsprung zu haben, musste es in der zweiten Halbzeit 6 Tore mehr erzielen als das Heimteam. Da das Auswärtsteam in der 2. Halbzeit doppelt so viele Tore wie das Heimteam erzielte, fielen in der 2. Halbzeit 6 Tore für das Heimteam und 12 Tore für das Auswärtsteam. Der Endstand war 20 : 21.

6. Sechs identische Rauten (auch Rhomben genannt) formen einen Stern. Jede Raute hat einen Flächeninhalt von $5\,\text{cm}^2$. Die Spitzen des Sterns bilden ein regelmässiges Sechseck. Welchen Flächeninhalt hat dieses Sechseck?



(**A**) $36\,\text{cm}^2$ (**B**) $40\,\text{cm}^2$ (**C**) $45\,\text{cm}^2$ (**D**) $48\,\text{cm}^2$ (**E**) $60\,\text{cm}^2$



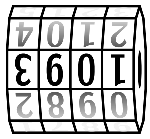
Lösung: Da die sechs spitzen Winkel der Rauten sich um den Mittelpunkt zu einem Vollwinkel ergänzen, sind sie jeder 60° gross. Demzufolge sind die stumpfen Winkel der Rauten 120° gross. Verbinden wir die Spitzen des Sterns mit dem Mittelpunkt, wird jede Raute halbiert und wir erhalten 12 graue Dreiecke, jeweils mit dem Flächeninhalt $2{,}5\,\text{cm}^2$. Der stumpfe Winkel eines jeden weissen Dreiecks ergänzt sich mit den beiden stumpfen Winkeln der benachbarten grauen Dreiecke zu 360°, ist also ebenfalls 120° gross. Folglich sind die weissen Dreiecke und die grauen Dreiecke zueinander kongruent (sws). Der Flächeninhalt des Sechsecks beträgt also $(12+6)\cdot 2{,}5\,\text{cm}^2 = 45\,\text{cm}^2$.

7. In unserer sechsköpfigen Schuljazzband spielen die Drillinge Samuel, Lukas und Gabriel aus meiner Klasse mit. Die drei anderen Bandmitglieder sind 13, 14 und 15 Jahre alt. Das Durchschnittsalter aller sechs Bandmitglieder beträgt 15 Jahre. Wie alt sind die Drillinge Samuel, Lukas und Gabriel?

(**A**) 15 Jahre (**B**) 16 Jahre (**C**) 17 Jahre (**D**) 18 Jahre (**E**) 19 Jahre

Lösung: Da das Durchschnittsalter der sechs Bandmitglieder 15 Jahre ist, müssen die Drillinge zusammen um so viel älter sein, wie die anderen drei zusammen jünger als das Durchschnittsalter sind – denn jedes dieser drei Bandmitglieder ist ja nicht älter als das Durchschnittsalter. Da das zusammen 3 Jahre sind, sind die Drillinge zusammen 3 Jahre älter, das heisst jeder einzelne ist ein Jahr älter als das Durchschnittsalter, das heisst 16 Jahre alt.
Diese Aufgabe lässt sich auch zügig mit Hilfe einer Gleichung lösen: Sei a das Alter der Drillinge, dann gilt $(3a+13+14+15) : 6 = 15$, woraus $3a = 6\cdot 15 - 42$ und schliesslich $a = 16$ folgt.

8. Als Mariam bei ihrem Fahrradschloss vorn den richtigen Code einstellt, sieht das Schloss von hinten aus wie abgebildet. Wie lautet der richtige Code?

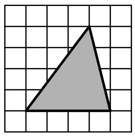
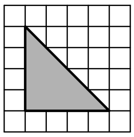
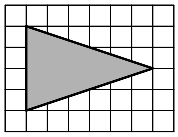
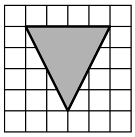
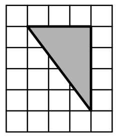


(**A**) 4836 (**B**) 3981 (**C**) 6548 (**D**) 6427 (**E**) 5358

Lösung: Bei jedem Zahlenring wird von vorn die Ziffer zu sehen sein, die um 5 grösser beziehungsweise um 5 kleiner ist als die Ziffer, die von hinten zu sehen ist. Ausserdem werden die Zahlenringe in umgekehrter Reihenfolge zu sehen sein. Der Zahlenring mit der umgedrehten 1 ist also ganz links und zeigt eine 6. Der richtige Code lautet 6548.

— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 8 gestellt. —

9. Welches der folgenden Dreiecke ist gleichschenklig, nicht rechtwinklig und hat einen Flächeninhalt von 8 Kästchen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Das Dreieck bei (**A**) ist nicht gleichschenklig, die Dreiecke bei (**B**) und (**E**) sind rechtwinklig. Als Lösung kommen nur (**C**) und (**D**) in Frage. Bei (**C**) und (**D**) ist die Basis des Dreiecks jeweils 4 Kästchenseiten lang. Die Längen der zugehörigen Höhen unterscheiden sich. Bei (**C**) beträgt sie 6 Kästchenseiten, das Dreieck hat einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6 = 12$ Kästchen, ist also zu gross. Bei (**D**) ist die Höhe 4 Kästchenseiten lang, der Flächeninhalt beträgt $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$ Kästchen, und folglich ist (**D**) die Lösung.

10. Ada hat sich eine Zahl gedacht. Das Ergebnis, das sie erhält, wenn sie von ihrer Zahl $\frac{1}{10}$ abzieht, ist dasselbe, das sie erhält, wenn sie ihre Zahl mit $\frac{1}{10}$ multipliziert. Welche Zahl hat Ada sich gedacht?

(**A**) $\frac{1}{100}$ (**B**) $\frac{1}{11}$ (**C**) $\frac{1}{10}$ (**D**) $\frac{11}{100}$ (**E**) $\frac{1}{9}$

Lösung: Wir nennen Adas Zahl x. Dann ist $x - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}x$. Nach Multiplikation mit 10 erhalten wir $10x - 1 = x$, woraus $9x = 1$ und daraus $x = \frac{1}{9}$ folgt.

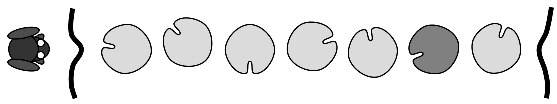
11. An der Wasserrutsche warten 10 Kinder. Eine Rutschfahrt mit konstanter Geschwindigkeit dauert 1 Minute. Erreicht ein Kind das letzte Zehntel der Bahn, so springt die Ampel auf Grün und das nächste Kind rutscht sofort los. Nach welcher Zeit sind alle 10 Kinder unten angekommen?

(**A**) 9 min 18 s (**B**) 9 min 6 s (**C**) 8 min 54 s (**D**) 8 min 30 s (**E**) 8 min 20 s

Lösung: Würde jedes der Kinder erst starten, wenn das vorherige Kind unten ankommt, so würde das 10. Kind nach 10 min unten angekommen sein. Die neun Kinder vom 2. bis zum 10. Kind starten jedoch jeweils, wenn das vorhergehende Kind das letzte Zehntel der Bahn erreicht, also $60\,\text{s} : 10 = 6\,\text{s}$ früher. Dadurch ist das 10. Kind $9 \cdot 6\,\text{s} = 54\,\text{s}$ eher als nach 10 min unten, das ist nach 9 min 6 s.

Wir stellen uns vor, dass in Aufgabe 11 die Ampelschaltung so verändert wurde, dass 10 Kinder bereits nach 7 min alle unten angekommen sind. Welchen Teil der Strecke hat ein Kind nun noch vor sich, wenn die Ampel auf Grün springt?

12. Ein Frosch möchte einen Teich überqueren. Er nutzt 7 Seerosenblätter in einer Reihe. Er springt immer nur 1 oder 2 Seerosenblätter vorwärts. Das 6. Seerosenblatt muss er überspringen, weil es welk ist. Wie viele verschiedene Varianten gibt es für den Frosch, den Teich auf diese Weise zu überqueren?



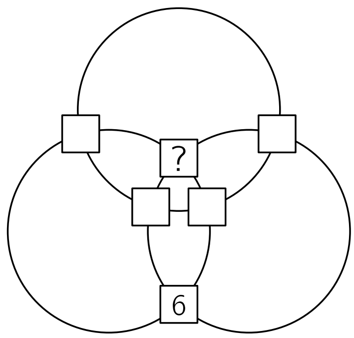
(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Der Frosch muss das 6. Seerosenblatt überspringen, also springt er auf jeden Fall vom 5. zum 7. Blatt. Um die Anzahl aller Varianten zu ermitteln, reicht es also, die Sprünge bis zum 5. Blatt zu betrachten. Wir schreiben alle Möglichkeiten systematisch auf, wobei wir nach der Anzahl der langen Sprünge sortieren:

kein langer Sprung:	1,1,1,1,1			
ein langer Sprung:	2,1,1,1	1,2,1,1	1,1,2,1	1,1,1,2
zwei lange Sprünge:	2,2,1	2,1,2	1,2,2	

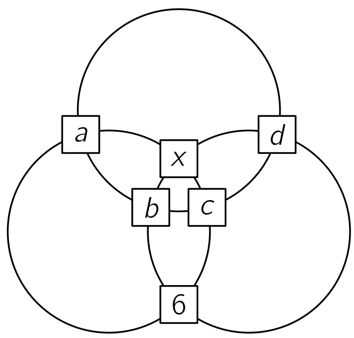
Es gibt insgesamt 8 verschiedene Varianten für den Frosch, den Teich auf diese Weise zu überqueren.

13. Die Zahlen von 1 bis 6 sollen in die sechs Quadrate in der abgebildeten Figur geschrieben werden. Auf jedem der drei Kreise liegen vier der Quadrate. Addiert man die vier Zahlen, die zum selben Kreis gehören, so soll die Summe bei allen drei Kreisen dieselbe sein. Die 6 ist bereits eingetragen. Welche Zahl gehört in das Quadrat mit dem Fragezeichen?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

Lösung: Wir bezeichnen die Zahlen in den Quadraten mit a, b, c, d und x wie im Bild. Da die Summe der Zahlen, die zum selben Kreis gehören, stets dieselbe ist, gilt $a + b + c + d = a + x + c + 6$, also $x + 6 = b + d$. Analog ist $x + 6 = a + c$. Die drei Summen $a + c$, $b + d$ und $x + 6$, in denen jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal vorkommt, sind also gleich. Da $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ist, ist jede der drei Summen 7. Daraus folgt, dass die gesuchte Zahl $x = 7 - 6 = 1$ ist.

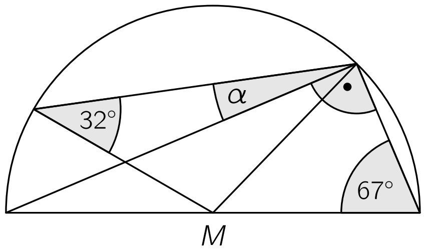


14. Wird die Jahreszahl 2021 durch 6, durch 7, durch 8 oder durch 9 geteilt, so erhält man jedes Mal den Rest 5. In wie vielen Jahren hat die Jahreszahl zum ersten Mal wieder diese Eigenschaft?

(**A**) 504 (**B**) 72 (**C**) 1512 (**D**) 126 (**E**) 336

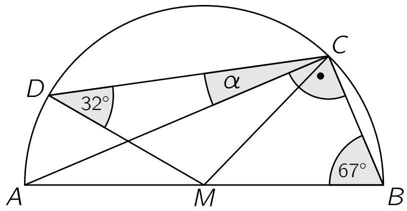
Lösung: Es lassen genau diejenigen Jahreszahlen bei Division durch 6, durch 7, durch 8 und durch 9 den Rest 5, die sich von 2021 um ein gemeinsames Vielfaches von 6, 7, 8 und 9 unterscheiden. Gesucht ist die kleinstmögliche solche Differenz, also das kleinste gemeinsame Vielfache von 6, 7, 8 und 9. Da jedes Vielfache von 8 und 9 auch ein Vielfaches von 6 ist, ist dies bereits das kleinste gemeinsame Vielfache von 7, 8 und 9, und das ist $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, da 7, 8 und 9 teilerfremd sind.
Dass keine der kleineren Zahlen in den Lösungsvorschlägen in Frage kommt, hätten wir auch finden können, indem wir die Teilbarkeit durchprobiert hätten. So ist zum Beispiel 72 nicht durch 7 teilbar.

15. Das Bild zeigt einen Halbkreis mit Mittelpunkt M. Wie gross ist α? (*Abb. nicht massstabsgerecht*)



(**A**) 5° (**B**) 7° (**C**) 9° (**D**) 11° (**E**) 13°

Lösung: Wir bezeichnen die auf dem Halbkreis liegenden Punkte wie in der Zeichnung. Die Strecken $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ und $\overline{MD}$ sind Radien des Halbkreises und die Dreiecke CMB und DMC somit gleichschenklig. Damit ist $\measuredangle MCB = 67^\circ$ und $\measuredangle DCM = 32^\circ$. Und da $\measuredangle ACB = 90^\circ$ ist, gilt $\alpha + 90^\circ = \measuredangle DCB = \measuredangle MCB + \measuredangle DCM$, woraus $\alpha = 67^\circ + 32^\circ - 90^\circ = 9^\circ$ folgt.

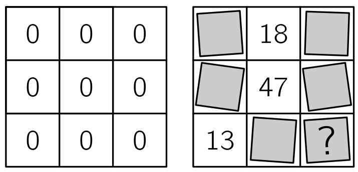


16. Am Känguru-Wettspringen nehmen 5 Kängurus mit den Startnummern I, II, III, IV und V teil. Zuerst startet Känguru V, gefolgt von IV, III, II und I – in dieser Reihenfolge. Jedes Mal, wenn ein Känguru ein anderes überholt, erhält es einen Punkt. Känguru II erreicht das Ziel zuerst, gefolgt von IV, I, V und III – in dieser Reihenfolge. Wie viele Punkte haben die 5 Kängurus insgesamt <u>mindestens</u> erhalten?

(**A**) 10 (**B**) 9 (**C**) 8 (**D**) 7 (**E**) 6

Lösung: Von der Zielankunft – II vor IV vor I vor V vor III – ausgehend zählen wir die Überholvorgänge, die auf jeden Fall stattgefunden haben müssen: Känguru II hat die Kängurus III, IV und V (mindestens) einmal überholt und dafür 3 Punkte erhalten. Känguru IV hat Känguru V (mindestens) einmal überholt und 1 Punkt erhalten und Känguru I hat die Kängurus III und V (mindestens) einmal überholt und dafür 2 Punkte erhalten. Insgesamt wurden also mindestens 6 Punkte vergeben. Das Rennen kann genau auf diese Weise stattgefunden haben, also so, dass die Überholvorgänge wie beschrieben abgespielt haben. Also ist (**E**) die Lösung.

17. Anselm hat ein mit Nullen gefülltes 3×3-Feld. In diesem 3×3-Feld wählt er in jedem Schritt ein 2×2-Quadrat aus und erhöht jede der vier darin stehenden Zahlen um 1. Nach einigen Schritten hört er auf. Drei der Zahlen, die nun in dem 3×3-Feld stehen, sind zu sehen, die anderen sind abgedeckt. Welche Zahl steht unter dem Fragezeichen?



(**A**) 16 (**B**) 17 (**C**) 19 (**D**) 20 (**E**) 22

Lösung: Die 13 im Kästchen links unten konnte nur dadurch entstehen, dass Anselm das 2×2-Feld links unten für seine Addition von Einsen benutzt hat; dabei wurde auch 13-mal eine 1 im mittleren Kästchen des 3×3-Feldes addiert. Die 18 oben in der Mitte kann nur entstehen, wenn Anselm entweder im linken oder im rechten oberen 2×2-Feld Einsen addiert hat, und jedes Mal, wenn er eine 1 im Kästchen oben in der Mitte addiert, dann addiert er auch eine 1 im mittleren Kästchen des 3×3-Feldes. Die restlichen addierten Einsen im mittleren Kästchen sind dazugekommen, als Anselm Einsen im 2×2-Feld rechts unten addiert hat. Und das hat er $47 - 13 - 18 = 16$-mal getan. Unter dem Fragezeichen steht also 16.

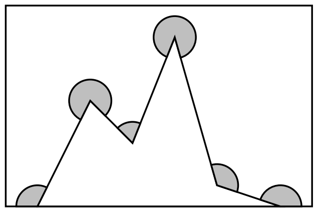
18. Nach dem Känguru-Wettbewerb werden an alle Schulen Urkunden und Preise geschickt. An zwei grossen Tischen werden Pakete gepackt. Jeder der fünf Pack-Helfer hat seinen festen Platz. Zur Frühstückspause zählt jeder Helfer seine fertigen Pakete. Es sind 9, 15, 17, 19 bzw. 21. Einer von ihnen hat all seine Pakete schon zum Paketwagen getragen. Nun liegen auf einem der beiden Tische dreimal so viele Pakete wie auf dem anderen Tisch. Wie viele Pakete sind schon auf dem Paketwagen?

(**A**) 9 (**B**) 15 (**C**) 17 (**D**) 19 (**E**) 21

Lösung: Da auf dem einen Tisch dreimal so viele Pakete wie auf dem anderen liegen, liegen auf den beiden Tischen zusammen viermal so viele Pakete wie auf dem Tisch mit der kleineren Anzahl. Ziehen wir also die Zahl der Pakete, die schon auf dem Wagen liegen, von der Gesamtzahl von $9 + 15 + 17 + 19 + 21 = 81$ Paketen ab, so ergibt sich eine durch 4 teilbare Zahl. Da 81 bei Division durch 4 den Rest 1 lässt, muss auch die Anzahl der Pakete, die schon auf dem Wagen liegen, bei Division durch 4 den Rest 1 lassen. Dafür kommen nur 9, 17 und 21 in Frage. Auf dem Tisch mit der kleineren Anzahl würden dann $(81 - 9) : 4 = 18$, $(81 - 17) : 4 = 16$ bzw. $(81 - 21) : 4 = 15$ Pakete liegen. Hiervon ist 15 eine der gegebenen Anzahlen, während 18 und 16 nicht vorkommen und sich auch nicht aus mehreren Haufen zusammenstellen lassen. Auf den beiden Tischen liegen also 15 bzw. $3 \cdot 15 = 45$ $(= 9 + 17 + 19)$ Pakete – und auf dem Paketwagen sind 21 Pakete.

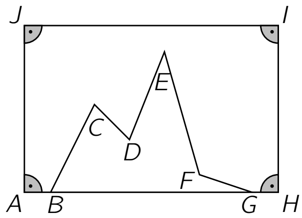
— *In Klassenstufe 11–13 wurde ein ähnliches Problem in Aufgabe 21 gestellt.* —

19. Wie gross ist die Summe der 6 Winkel, die in der Figur markiert sind?



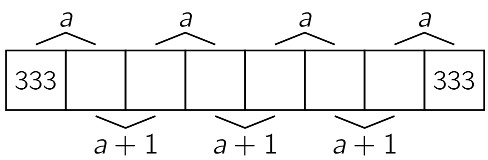
(**A**) 960° (**B**) 1020° (**C**) 1080° (**D**) 1120° (**E**) 1140°

Lösung: Die gesuchte Winkelsumme können wir finden, wenn wir – was möglicherweise nicht unmittelbar auffällt – bemerken, dass $ABCDEFGHIJ$ ein Zehneck ist. Die Winkelsumme im Zehneck ist $(10 - 2) \cdot 180° = 1440°$, und wenn wir die Summe der vier rechten Winkel bei A, H, I und J subtrahieren, erhalten wir die gesuchte Summe der 6 markierten Winkel: $1440° - 4 \cdot 90° = 1080°$.



Zum selben Ergebnis gelangen wir auch, wenn wir durch die Punkte B bis G Parallelen zu AJ ziehen und so zwei Rechtecke am Rand und 5 Trapeze im Inneren erhalten, deren untere zwei Winkel immer zusammen 180° ergeben. Die gesuchte Summe ist die Summe aus $5 \cdot 180°$ (von den 5 Trapezen) und der Grösse von zwei rechten Winkeln (von den Rechtecken), also $5 \cdot 180° + 2 \cdot 90° = 6 \cdot 180° = 1080°$.

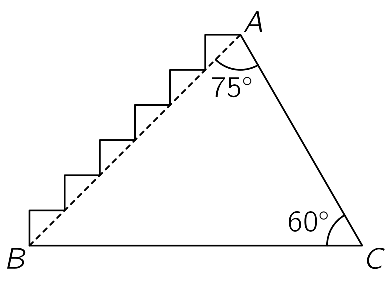
20. In die Felder des abgebildeten Streifens sollen Zahlen eingetragen werden. Im 1. und im 8. Feld steht jeweils 333. Die Summe benachbarter Zahlen soll abwechselnd a und $a+1$ sein, so wie abgebildet. Welchen Wert muss a haben?



(**A**) 336 (**B**) 933 (**C**) 666 (**D**) 369 (**E**) 669

Lösung: Im 3. Feld muss 334 stehen, da die Summe der Zahlen im 2. und 3. Feld um 1 grösser ist als die Summe der Zahlen im 2. und 1. Feld. Analog schliessen wir, dass im 5. Feld 335 und im 7. Feld 336 steht. Daraus ergibt sich $a = 336 + 333 = 669$.

21. Im Dreieck ABC mit den Winkeln $\measuredangle BAC = 75°$ und $\measuredangle ACB = 60°$ sowie der Seitenlänge $|\overline{AC}| = 1$ wurde die Seite $\overline{AB}$ durch eine „Treppe“ ersetzt (s. Abb.). Wie lang ist diese treppenförmige Linie?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) $\frac{3}{2}$ (**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) $\sqrt{3}$

Lösung: Mit H sei der Fusspunkt der Höhe von A auf $\overline{BC}$ bezeichnet. Wir stellen zuerst fest, dass $\measuredangle CBA = 180° - 60° - 75° = 45°$ ist. Dann schliesst die Höhe $\overline{AH}$ mit $\overline{BA}$ auch einen Winkel von 45° ein und BHA ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Die treppenförmige Linie über $\overline{BA}$ hat dieselbe Länge wie die Summe der beiden Katheten von BHA, also $2 \cdot |\overline{AH}|$. Das Dreieck HCA ist rechtwinklig bei H und hat bei C einen Winkel von 60°. Es ist also die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe $\overline{AH}$. Da $|\overline{CA}| = 1$ ist, ist $|\overline{AH}| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Folglich ist die Länge der treppenförmigen Linie $\sqrt{3}$.

22. Für die Zahlen a, b und c gilt $a+b+c=0$ sowie $abc=78$. Welchen Wert hat $(a+b)(b+c)(c+a)$?

(**A**) -156 (**B**) -78 (**C**) -39 (**D**) 78 (**E**) 156

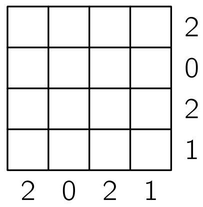
Lösung: Die Gleichung $a+b+c=0$ können wir zu $a+b=-c$, $b+c=-a$ und $c+a=-b$ umformen. Durch Einsetzen erhalten wir $(a+b)(b+c)(c+a)=(-c)(-a)(-b)=-abc=-78$.

23. Wenn N die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 2021 ist, welche Quersumme hat dann die Zahl $N+2021$?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 19 (**D**) 28 (**E**) 2021

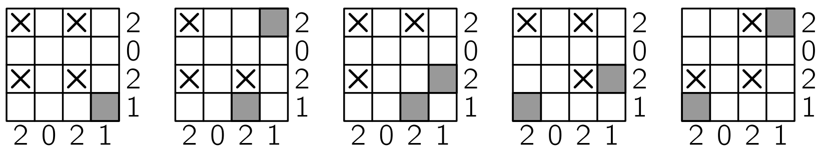
Lösung: Die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 2021 muss auf die grösstmögliche Anzahl von Neunen enden. Da $2021 : 9 = 224$ Rest 5 ist, ist $5\underbrace{99\ldots9}_{224-\text{mal}}$ diese Zahl. Addieren wir 2021, so erhalten wir $6\underbrace{00\ldots0}_{220-\text{mal}}2020$, und diese Zahl hat die Quersumme 10.

24. In dem 4×4-Feld sollen einige der 16 Zellen schwarz gefärbt werden. Die Zahlen, die neben bzw. unter dem Feld stehen, geben die Anzahl der schwarz zu färbenden Zellen in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte an. Wie viele unterschiedliche Färbungen des 4×4-Feldes sind so möglich?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) mehr als 5

Lösung: Für die beiden Reihen, in denen die Einsen am Rand stehen, gibt es genau fünf mögliche Färbungen (im Bild grau markiert). In jedem dieser fünf Fälle ist das Färben der restlichen Zellen damit eindeutig festgelegt (jeweils mit einem Kreuz markiert). Also sind 5 verschiedene Färbungen möglich.

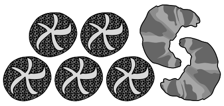


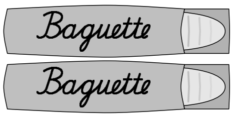
25. Mila, Olivia und Elena schreiben 2 Minuten lang möglichst viele Hauptstädte auf. Wer eine aufschreibt, die keine der beiden anderen hat, erhält 3 Punkte. Ist eine Hauptstadt von genau zweien gewählt, so bekommt jede dieser beiden 1 Punkt. Ist eine Hauptstadt bei allen dabei, gibt es 0 Punkte. Zum Schluss hat jede 10 Hauptstädte aufgeschrieben. Als sie ihre Punkte addieren, hat jede eine andere Summe. Olivia ist Letzte mit 19 Punkten. Elena hat die meisten Punkte. Wie viele Punkte hat Mila?

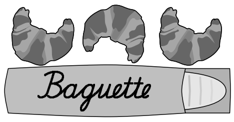
(**A**) 20 (**B**) 21 (**C**) 23 (**D**) 24 (**E**) 25

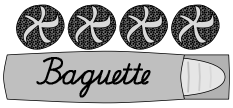
Lösung: Für die 19 Punkte hat Olivia mindestens 5-mal 3 Punkte bekommen, denn hätte sie nur 4-mal 3 Punkte bekommen, so hätte sie höchstens noch 6-mal 1 Punkt bekommen, also insgesamt weniger als 19. Olivia kann jedoch nicht 6-mal (und häufiger schon gar nicht) 3 Punkte bekommen haben, denn dann hätte sie noch einmal 1 Punkt bekommen, also 3-mal 0 Punkte. Dann müssten Mila und Elena jedoch ebenfalls 3-mal 0 Punkte bekommen haben, und eine der beiden müsste mindestens einmal 1 Punkt bekommen haben – wie Olivia –, hätte damit insgesamt höchstens 19 Punkte, was der Bedingung, dass die Punktzahlen verschieden sind, oder der Bedingung, dass Olivia Letzte ist, widerspricht. Olivia hat also 5-mal 3 Punkte, 4-mal 1 Punkt und einmal 0 Punkte bekommen.
Elena und Mila haben ebenfalls genau einmal 0 Punkte bekommen. Die 4 Hauptstädte, für die Olivia 1 Punkt bekommen hat, hat jeweils auch eine der beiden anderen aufgeschrieben und dafür 1 Punkt bekommen. Damit nicht zwei dieselbe Punktzahl haben, muss Mila, die Zweitplatzierte, 3-mal 1 Punkt bekommen haben und Elena einmal. Damit hat Mila also 6-mal 3 Punkte, 3-mal 1 Punkt und einmal 0 Punkte bekommen, nur so hat sie mehr Punkte als Olivia. Elena hat 8-mal 3 Punkte, einmal 1 Punkt und einmal 0 Punkte, zusammen also 25 Punkte. Und die gesuchte Punktzahl von Mila ist 21.

26. Seit fast einem Jahr erledigt Lorenz für fünf Seniorinnen und Senioren aus der Nachbarschaft einige Einkäufe. Heute hat er beim Bäcker eingekauft. Vier der Einkäufe hatten denselben Preis. Für einen der Einkäufe hatte Lorenz einen anderen Betrag zu bezahlen. Für welchen?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: Nehmen wir an, dass die Einkäufe mit Baguette (**B**), (**C**), (**D**) denselben Preis P haben. Dann kostet wegen (**B**) ein Baguette $\frac{1}{2}P$, und folglich wegen (**C**) ein Croissant $\frac{1}{6}P$ und wegen (**D**) ein Mohnbrötchen $\frac{1}{8}P$. Dann wäre der Preis von Einkauf (**A**) gleich $5 \cdot \frac{1}{8}P + 2 \cdot \frac{1}{6}P = \frac{23}{24}P \neq P$ und der Preis von Einkauf (**E**) gleich $2 \cdot \frac{1}{8}P + 4 \cdot \frac{1}{6}P = \frac{11}{12}P \neq P$. Das kann aber nicht sein, da vier der Einkäufe denselben Preis haben. Also haben auf jeden Fall die beiden Einkäufe (**A**) und (**E**) denselben Preis P. Dann ist wegen (**A**) der Preis von 10 Mohnbrötchen und 4 Croissants zusammen $2P$. Wegen (**E**) folgt daraus, dass der Preis von 8 Mohnbrötchen P ist bzw. der von einem gleich $\frac{1}{8}P$. Demzufolge kostet ein Croissant $\frac{3}{16}P$. Da zwei der anderen Einkäufe ebenfalls den Preis P haben, berechnen wir bei jedem den Preis für das Baguette unter der Annahme, dass der Einkauf den Preis P hat: (**B**) $\frac{1}{2}P$, (**C**) $\frac{7}{16}P$ und (**D**) $\frac{1}{2}P$. Da nur bei (**B**) und (**D**) derselbe Preis herauskommt, muss (**C**) der Einkauf sein, für den ein anderer Betrag zu zahlen war.

27. Wie viele 5-stellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen das Produkt ihrer Ziffern gleich 1000 ist?

(**A**) 10 (**B**) 20 (**C**) 30 (**D**) 40 (**E**) 60

Lösung: Es ist $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Da alle Vielfachen von 5 (ausser 5 selbst) mindestens 2-stellig sind, müssen die drei Fünfen als Ziffern auftreten. Das Produkt der beiden restlichen Ziffern muss $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ sein. Dafür kommen nur 1 und 8 oder 2 und 4 in Frage. In beiden Fällen gibt es für die Anordnung der Faktoren $5 \cdot 4 = 20$ Möglichkeiten, insgesamt also 40.
Es ist auch machbar, die Möglichkeiten systematisch aufzulisten:

24555	52455	55245	55524	18555	51855	55185	55518
25455	52545	55254		15855	51585	55158	
25545	52554			15585	51558		
25554				15558			
42555	54255	55425	55542	81555	58155	55815	55581
45255	54525	55452		85155	58515	55851	
45525	54552			85515	58551		
45552				85551			

Wer findet 12 ganze Zahlen (nicht notwendigerweise verschiedene), deren Summe und auch deren Produkt gleich 12 ist? Wer findet mehrere Möglichkeiten?

28. Für eine Balkenwaage gibt es 8 Wägestücke, alle unterschiedlich schwer und jedes mit ganzzahliger Masse (in g). Werden 2 beliebige Wägestücke zusammen auf eine Waagschale gelegt und auf die andere Waagschale 2 beliebige der restlichen, so ist in jedem Fall die Seite die schwerere, auf der sich das schwerste der 4 Wägestücke befindet. Welche Masse hat das schwerste Wägestück mindestens?

(**A**) 12 g (**B**) 34 g (**C**) 55 g (**D**) 128 g (**E**) 256 g

Lösung: Da wir die geringste Masse für das schwerste Wägestück suchen, beginnen wir bei den leichtesten drei Wägestücken mit den kleinstmöglichen ganzzahligen Massen 1 g, 2 g und 3 g. Wir bestimmen nacheinander die kleinstmögliche Masse für das nächstschwerere Wägestück. Es muss mindestens so viel wiegen wie die beiden bis dahin schwersten Wägestücke zusammen, um auch mit dem kleinsten Wägestück von 1 g zusammen die Schale zum Sinken zu bringen. Damit ergeben sich für die folgenden Wägestücke die kleinstmöglichen Massen zu $2\,\text{g} + 3\,\text{g} = 5\,\text{g}$, $3\,\text{g} + 5\,\text{g} = 8\,\text{g}$, $5\,\text{g} + 8\,\text{g} = 13\,\text{g}$, $8\,\text{g} + 13\,\text{g} = 21\,\text{g}$ und für das schwerste Wägestück zu $13\,\text{g} + 21\,\text{g} = 34\,\text{g}$.

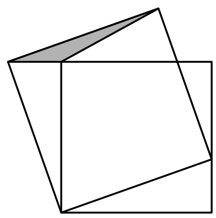
29. Wir stellen uns eine lange Reihe vor, in der 2021 einfarbige Bälle liegen. Jeder der Bälle ist entweder blau, rot, weiss oder grün. Unter 5 nebeneinanderliegenden Bällen ist stets genau ein blauer, genau ein roter und genau ein weisser. Auf jeden roten Ball folgt ein weisser Ball. Der 2. Ball, der 20. Ball und der 202. Ball sind grün. Welche Farbe hat der letzte Ball in der Reihe?

(**A**) blau (**B**) rot (**C**) weiss (**D**) grün (**E**) Das ist nicht bestimmt.

Lösung: Da unter 5 aufeinanderfolgenden Bällen die Farbverteilung immer gleich ist (ein blauer, ein roter, ein weisser und folglich zwei grüne), hat der 1. Ball dieselbe Farbe wie der 6., 11., 16., ..., der 2. Ball dieselbe Farbe wie der 7., 12., 17., ... und so weiter. Bälle, deren Nummern beim Teilen durch 5 den gleichen Rest lassen, haben also dieselbe Farbe.
Da der 20. Ball grün ist, sind auch der 15., der 10. und der 5. Ball grün. Weil unter den ersten 5 Bällen ein roter und ein weisser Ball ist, auf jeden roten Ball ein weisser folgt und wir bereits wissen, dass der 2. und der 5. Ball grün sind, muss der 3. Ball rot sein und der 4. Ball weiss. Der fehlende blaue Ball unter den ersten 5 Bällen ist der 1. Ball. Da 2021 bei Teilen durch 5 den Rest 1 lässt, ist der letzte Ball (der 2021.) wie der 1. Ball blau.

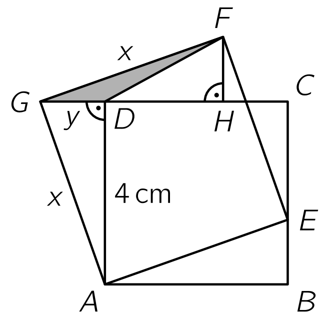
— *Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 27 gestellt.* —

30. Das kleinere der abgebildeten Quadrate hat den Flächeninhalt $16\,\text{cm}^2$, das graue Dreieck den Flächeninhalt $1\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat das grössere Quadrat?



(**A**) $17\,\text{cm}^2$ (**B**) $18\,\text{cm}^2$ (**C**) $19\,\text{cm}^2$ (**D**) $20\,\text{cm}^2$ (**E**) $21\,\text{cm}^2$

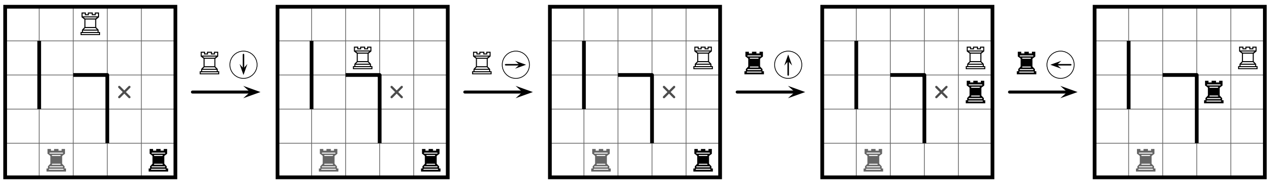
Lösung: Wir bezeichnen die Punkte und Seitenlängen wie rechts in der Zeichnung. Zuerst stellen wir fest, dass die Punkte G, D und C auf einer Geraden liegen, denn der Winkel $\measuredangle GDA$ ist ein rechter, da die Dreiecke ADG und ABE zueinander kongruent sind (sws).
Es ist $|\overline{GA}| = x$ und $|\overline{GD}| = y$. Die Dreiecke GAD und FGH sind beide rechtwinklig mit übereinstimmenden Winkeln, also zueinander ähnlich, und da $|\overline{GF}| = |\overline{GA}|$ ist, sogar zueinander kongruent. Also ist $|\overline{GD}| = |\overline{FH}|$ und, da der Flächeninhalt des grauen Dreiecks gleich $1\,\text{cm}^2$ ist, ergibt sich daraus $1\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{GD}| \cdot |\overline{FH}| = \frac{1}{2}y^2$, woraus nach dem Satz des Pythagoras $|\overline{GA}|^2 = x^2 = y^2 + (4\,\text{cm})^2 = 18\,\text{cm}^2$ folgt. Das ist der gesuchte Flächeninhalt des grösseren Quadrats.



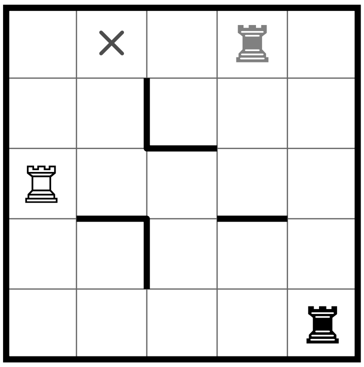
Türme auf Wanderschaft

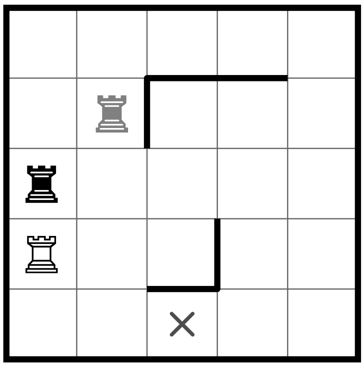
Ziel ist es bei diesem Rätsel, die Türme nacheinander so zu ziehen, dass am Ende der schwarze Turm auf dem Feld mit dem Kreuz steht. Ein Zug besteht darin, einen Turm auszuwählen und entweder nach oben, nach unten, nach links oder nach rechts zu ziehen, und zwar so weit, bis er auf ein Hindernis trifft, das heisst, bis er entweder den Rand des Spielfeldes, eine Mauer oder einen anderen Turm erreicht. Mauern und andere Türme dürfen nicht übersprungen werden. Es müssen nicht alle Türme benutzt werden. Anders als beim Schach können sich die Türme nicht gegenseitig schlagen.

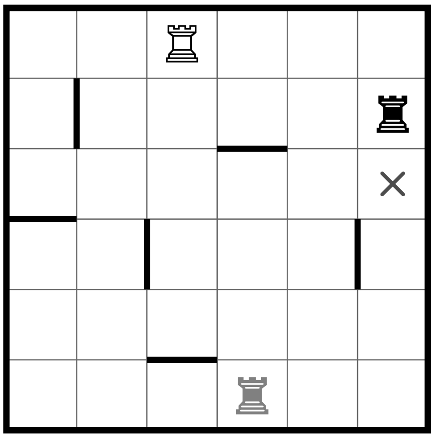
Das Beispiel zeigt, wie es gelingt, den schwarzen Turm in 4 Zügen auf das Kreuz zu ziehen:

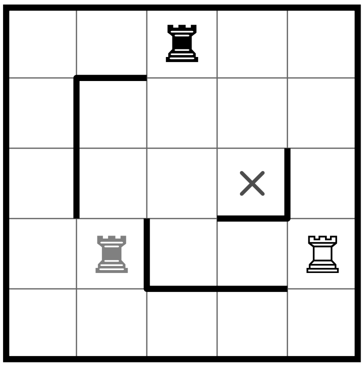


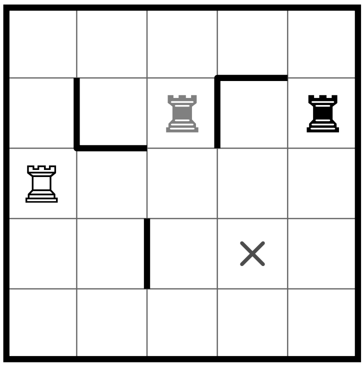
Wer schafft es, mit möglichst wenigen Zügen den schwarzen Turm auf das Kreuz zu ziehen?

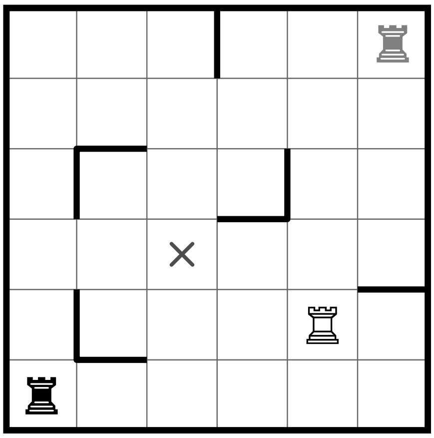


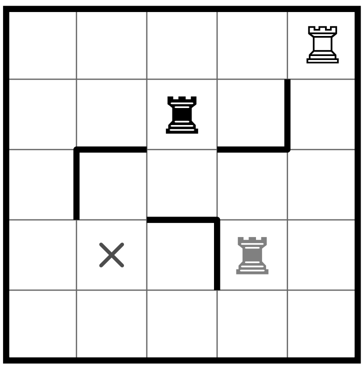


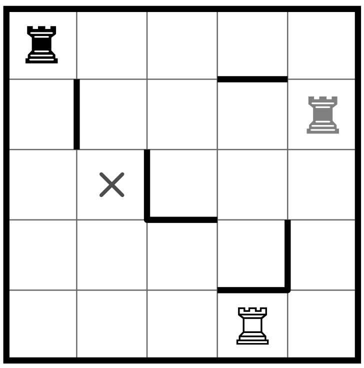












Wem gelingt es, statt des schwarzen Turms jeweils den weissen oder den grauen Turm auf das Kreuz zu ziehen?

Rechengitter

In jedes Rechengitter sind die Zahlen von 1 bis 9 so einzutragen, dass die Zahlen in den grauen Feldern genau die Ergebnisse der dazugehörigen Rechnungen in den Zeilen bzw. Spalten sind.

Nicht vergessen: Es gilt „Punktrechnung vor Strichrechnung“.

Wer findet alle Lösungen?

	+		+		=	**23**
+		+		+		
	+		+		=	**8**
+		+		+		
	+		+		=	**14**
=		=		=		
21		**14**		**10**		

	×		×		=	**15**
+		×		+		
	×		+		=	**50**
−		+		+		
	+		+		=	**15**
=		=		=		
5		**25**		**22**		

	×		×		=	**270**
×		×		×		
	×		×		=	**168**
×		×		×		
	×		×		=	**8**
=		=		=		
80		**252**		**18**		

	×		+		=	**73**
×		−		×		
	+		−		=	**10**
+		+		×		
	×		+		=	**14**
=		=		=		
56		**6**		**12**		

	−		+		=	**7**
+		×		+		
	×		+		=	**15**
+		−		+		
	×		×		=	**56**
=		=		=		
8		**4**		**22**		

	−		−		=	**-16**
+		÷		÷		
	÷		÷		=	**1**
−		−		+		
	−		−		=	**-2**
=		=		=		
0		**-1**		**9**		

	×		+		=	**30**
+		×		+		
	÷		×		=	**24**
−		+		−		
	+		−		=	**2**
=		=		=		
12		**27**		**5**		

	×		×		=	**30**
+		×		×		
	+		−		=	**5**
+		−		÷		
	+		+		=	**14**
=		=		=		
10		**21**		**6**		

	×		×		=	**84**
−		−		−		
	×		×		=	**48**
−		−		−		
	×		×		=	**90**
=		=		=		
4		**-10**		**-11**		

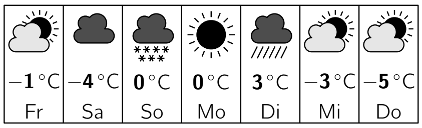
Auf www.mathe-kaenguru.de/broschueren können die Rechengitter auch online gelöst werden.

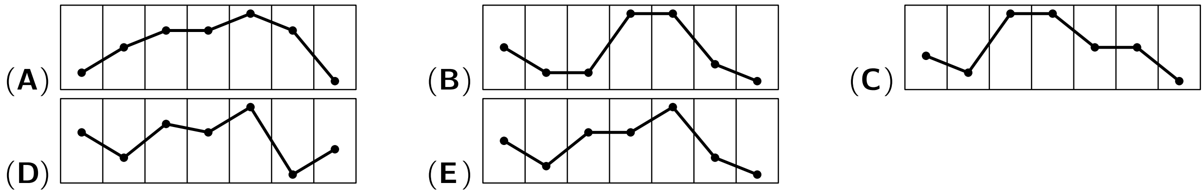
Lust auf mehr?

Die Idee für die Rechengitter stammt von www.janko.at/Raetsel/Rechengitter, wo es ähnliche Rechengitter und auch viele andere Rätsel zu entdecken gibt.

Klassenstufen 11 bis 13

1. Die Wetter-App auf Magdalenas Handy zeigt die zu erwartenden Höchsttemperaturen der nächsten sieben Tage an (s. Abb.). Wie sieht der dazugehörige Graph aus?

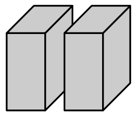




Lösung: Am Samstag wird es kälter als am Freitag, also ist (**A**) nicht die Lösung. Am Sonntag und am Montag wird es gleich kalt, also sind (**B**) und (**D**) auch nicht die Lösung. Der Dienstag wird der wärmste Tag, somit ist auch (**C**) nicht die Lösung. (**E**) ist der dazugehörige Graph.

— In den Klassenstufen 7/8 und 9/10 gab es ein ähnliches Problem in Aufgabe 2 bzw. 1. —

2. Ein Würfel mit Kantenlänge 1 m wird so halbiert, dass zwei gleich grosse Quader entstehen. Wie gross ist der Oberflächeninhalt von einem solchen Quader?



(**A**) $3\,\text{m}^2$ (**B**) $4\,\text{m}^2$ (**C**) $5\,\text{m}^2$ (**D**) $6\,\text{m}^2$ (**E**) $7\,\text{m}^2$

Lösung: Die Oberfläche eines solchen Quaders besteht aus 2 Flächen der Grösse $1\,\text{m}^2$ und 4 Flächen der Grösse $0{,}5\,\text{m}^2$. Der Oberflächeninhalt ist also gleich $2 \cdot 1\,\text{m}^2 + 4 \cdot 0{,}5\,\text{m}^2 = 4\,\text{m}^2$.

3. Wie viele natürliche Zahlen sind grösser als $20 - \sqrt{21}$ und kleiner als $20 + \sqrt{21}$?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12 (**E**) 13

Lösung: Da $16 < 21 < 25$, ist $4 < \sqrt{21} < 5$. Die natürlichen Zahlen zwischen $20 - \sqrt{21}$ und $20 + \sqrt{21}$ sind folglich die natürlichen Zahlen von $20 - 4 = 16$ bis $20 + 4 = 24$. Das sind 9 Zahlen.

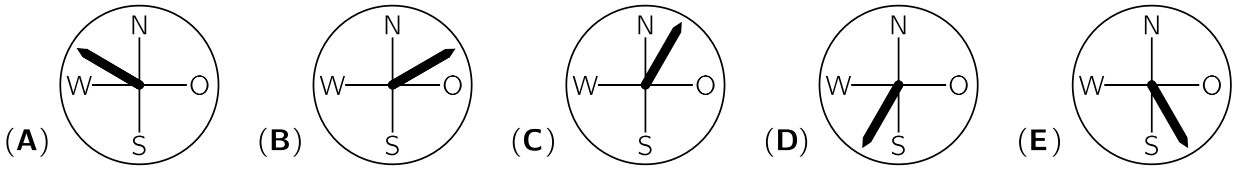
Tommy hat sich die fünf Zahlen 143, 144, 145, 146 und 147 notiert. An eine der Zahlen hängt er hinten eine 0 an. Nun addiert er die Zahlen und erhält die Jahreszahl 2021. An welche Zahl hat Tommy eine 0 angehängt?

4. Im August lassen sich nachts viele Sternschnuppen beobachten. Im letzten Jahr hat Jesko innerhalb einer Stunde 100 Sternschnuppen gesehen. Das heisst, er sah durchschnittlich eine Sternschnuppe alle

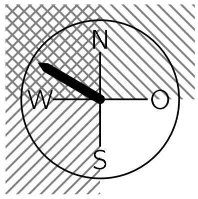
(**A**) 28 Sekunden. (**B**) 30 Sekunden. (**C**) 36 Sekunden. (**D**) 40 Sekunden. (**E**) 42 Sekunden.

Lösung: Eine Stunde entspricht 60 Minuten und eine Minute entspricht 60 Sekunden. Das heisst, eine Stunde entspricht $60 \cdot 60 = 3600$ Sekunden. Also hat Jesko durchschnittlich eine Sternschnuppe alle $3600 : 100 = 36$ Sekunden gesehen.

5. Durch den Sturm letzte Nacht wurde der Fahnenmast vor unserer Schule verbogen. Schaut man aus Richtung Norden oder aus Richtung Osten auf den Mast, so lehnt er beide Male nach rechts. In einem der Bilder ist dargestellt, in welche Richtung der Mast verbogen ist. In welchem?



Lösung: Da sich der Mast nach rechts lehnt, wenn man von Norden schaut, lehnt der Mast auf der Windrose nach links. Da sich der Mast nach rechts lehnt, wenn man von Osten schaut, lehnt der Mast auf der Windrose nach oben. Das trifft nur auf (**A**) zu.

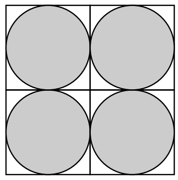


6. Welche der folgenden Zahlen ist am grössten?

(**A**) $0{,}815^4$ (**B**) $0{,}815^2$ (**C**) $0{,}815$ (**D**) $\sqrt{0{,}815}$ (**E**) $\sqrt[4]{0{,}815}$

Lösung: Wird eine Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt, quadriert, so ist das Ergebnis kleiner als die ursprüngliche Zahl. Somit gilt $0{,}815^4 = (0{,}815^2)^2 < 0{,}815^2 < 0{,}815$. Wird von einer Zahl, die zwischen 0 und 1 liegt, die Wurzel gezogen, so ist das Ergebnis grösser als die ursprüngliche Zahl. Somit gilt $\sqrt[4]{0{,}815} = \sqrt{\sqrt{0{,}815}} > \sqrt{0{,}815} > 0{,}815$. Folglich ist $\sqrt[4]{0{,}815}$ die grösste der fünf Zahlen.

7. Ein grosses Quadrat ist in vier kleinere Quadrate unterteilt (s. Abb.). In jedem der kleinen Quadrate ist ein grauer Kreis eingepasst. Welcher Anteil der Fläche des grossen Quadrats ist grau?



(**A**) $\frac{4}{5}$ (**B**) $\frac{3\pi}{16}$ (**C**) $\frac{3}{\pi}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{\pi}{4}$

Lösung: Jedes Quadrat, in das ein Kreis mit Radius r eingepasst ist, hat die Seitenlänge $2r$. Also ist der Anteil der Fläche des Kreises an der Fläche des Quadrats gleich $\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$ und insbesondere unabhängig von r. Somit ist in jedem kleinen Quadrat $\frac{\pi}{4}$ der Fläche grau, also ist auch $\frac{\pi}{4}$ der Fläche des grossen Quadrats grau.

8. Wie viele zweistellige natürliche Zahlen sind durch 3 teilbar und haben nur ungerade Ziffern?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 8 (**E**) 12

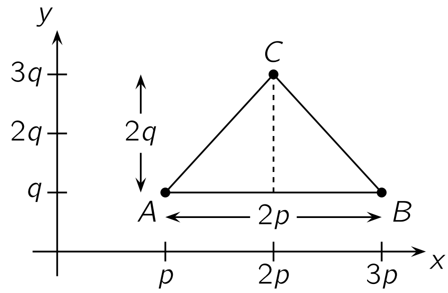
Lösung: Eine zweistellige Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme, also die Summe ihrer beiden Ziffern, durch 3 teilbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn beide Ziffern durch 3 teilbar sind oder wenn eine Ziffer den Rest 1 und die andere den Rest 2 beim Teilen durch 3 lässt. Zum ersten Fall: Die ungeraden durch 3 teilbaren Ziffern sind die 3 und die 9. Aus ihnen lassen sich 33, 39, 93 und 99 bilden. Zum zweiten Fall: Die ungeraden Ziffern, die den Rest 1 beim Teilen durch 3 lassen, sind die 1 und die 7, und die 5 lässt den Rest 2 beim Teilen durch 3. Aus ihnen lassen sich 15 und 51 sowie 75 und 57 bilden. Insgesamt sind es 8 Zahlen.

Mira schreibt die Jahreszahl 2021 als Summe von fünf natürlichen Zahlen, deren Ziffern nur Fünfen und Siebenen sind.

Wie viele Siebenen verwendet Mira insgesamt für die fünf Summanden?

9. In ein Koordinatensystem werden die Punkte $A(p\,|\,q)$, $B(3p\,|\,q)$ und $C(2p\,|\,3q)$ eingezeichnet, wobei $p > 0$ und $q > 0$ gilt. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC ?

(**A**) $\frac{1}{2}pq$ (**B**) $2pq$ (**C**) $3pq$ (**D**) $4pq$ (**E**) $\frac{9}{2}pq$



Lösung: Diese Aufgabe lösen wir am besten mit Hilfe einer Zeichnung. Die Strecke $\overline{AB}$ ist parallel zur x-Achse, da A und B dieselbe y-Koordinate haben. Es gilt $|\overline{AB}| = 3p - p = 2p$. Die Länge der zugehörigen Höhe ist gleich $3q - q = 2q$. Also ist der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ gleich $\frac{1}{2} \cdot 2p \cdot 2q = 2pq$.

10. Amanda denkt sich eine rationale Zahl zwischen 2 und 4, Justus eine zwischen 7 und 8 und Theresa eine zwischen 5 und 6. Was gilt mit Sicherheit für die Summe S dieser drei Zahlen?

(**A**) $S \leq 17$ (**B**) $S \geq 16$ oder $S \leq 14$ (**C**) $S \geq 14$ und $S \leq 18$
(**D**) $S \geq 15$ und $S \leq 22$ (**E**) $S \geq 17$ oder $S \leq 15$

Lösung: Die Summe S ist ganz sicher nicht kleiner als $2 + 7 + 5 = 14$, also $S \geq 14$. Und sie ist sicher nicht grösser als $4 + 8 + 6 = 18$, also $S \leq 18$. Also gilt (**C**) mit Sicherheit.
Die anderen Antwortmöglichkeiten gelten dagegen nicht mit Sicherheit: Bei $3{,}9 + 7{,}9 + 5{,}9 = 17{,}7$ ist (**A**) nicht erfüllt; bei $2{,}8 + 7{,}1 + 5{,}1 = 15$ ist (**B**) nicht erfüllt; bei $2{,}1 + 7{,}1 + 5{,}1 = 14{,}3$ ist (**D**) nicht erfüllt; bei $3 + 7{,}5 + 5{,}5 = 16$ ist (**E**) nicht erfüllt.

11. An einen Getränkemarkt wurden zwei Paletten mit insgesamt 60 Getränkekästen geliefert. Von einer Palette wurden einige Kästen sofort abgeladen. Sowohl vor als auch nach dem Abladen waren auf einer der Paletten 1,5-mal so viele Kästen wie auf der anderen. Wie viele Kästen wurden sofort abgeladen?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 16 (**D**) 20 (**E**) 24

Lösung: Es sei K die Anzahl der Kästen, die vor dem Abladen auf der volleren Palette standen. Auf der anderen Palette standen folglich $60 - K$ Kästen. Es gilt also $1{,}5 \cdot (60 - K) = K$, und daraus folgt $K = 1{,}5 \cdot 60 : 2{,}5 = 36$ und $60 - K = 24$. Von der Palette mit den 36 Kästen wurden sofort so viele Kästen abgeladen, dass danach noch $24 : 1{,}5 = 16$ darauf stehen blieben. Es wurden also $36 - 16 = 20$ Kästen sofort abgeladen.

— Ein ähnliches, deutlich leichteres Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 5 gestellt. —

12. Wie gross ist der Anteil der ungeraden Zahlen an den positiven Teilern von $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{1}{6}$

Lösung: Man könnte alle positiven Teiler von $5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ bestimmen, das sind 16. Und dann zählen, wie viele davon ungerade sind, das sind 4, nämlich 1, 3, 5 und $3 \cdot 5 = 15$. Also ist der Anteil der ungeraden Zahlen an den positiven Teilern gleich $\frac{1}{4}$.
Wer bemerkt, dass sich die Menge der Teiler von 5! geschickt unterteilen lässt, gelangt zum Ergebnis, ohne alle Teiler bestimmen zu müssen. Jeder Teiler von 5! ist entweder ungerade oder das Doppelte, das Vierfache oder das Achtfache eines ungeraden Teilers, da $8 = 2^3$ die grösste Zweierpotenz ist, die 5! teilt. Dann ist sofort ersichtlich, dass es von diesen 4 Sorten jeweils gleich viele gibt, das heisst der Anteil der ungeraden Teiler von 5! ist gleich $\frac{1}{4}$.

13. Ein Blatt Papier ist x cm lang und y cm breit, wobei $x > y$ gilt. Verklebt man die beiden langen oder die beiden kurzen Seiten, erhält man den Mantel eines höheren oder eines flacheren Zylinders. Wie gross ist das Verhältnis des Volumens des höheren Zylinders zum Volumen des flacheren Zylinders?

(**A**) $1 : y^2$ (**B**) $y^2 : x^2$ (**C**) $x : y^2$ (**D**) $y : x$ (**E**) $x : 1$

Lösung: Der höhere Zylinder ist x cm hoch und der Umfang seiner Grundfläche ist gleich y cm. Der Radius seiner Grundfläche ist also gleich $\frac{y}{2\pi}$ cm. Folglich ist das Volumen des höheren Zylinders gleich $\pi \cdot \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 \cdot x\,\text{cm}^3$. Analog ist das Volumen des flacheren Zylinders gleich $\pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y\,\text{cm}^3$. Das gesuchte Verhältnis ist gleich $\left(\pi \cdot \left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 \cdot x\right) : \left(\pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y\right) = y : x$.

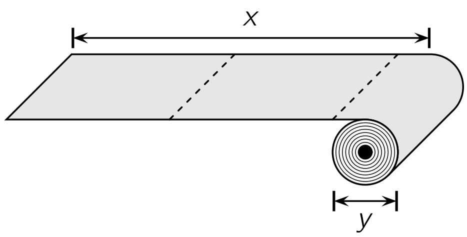
14. Wie viele dreistellige natürliche Zahlen sind um 99 kleiner als die Zahl, die entsteht, wenn ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden?

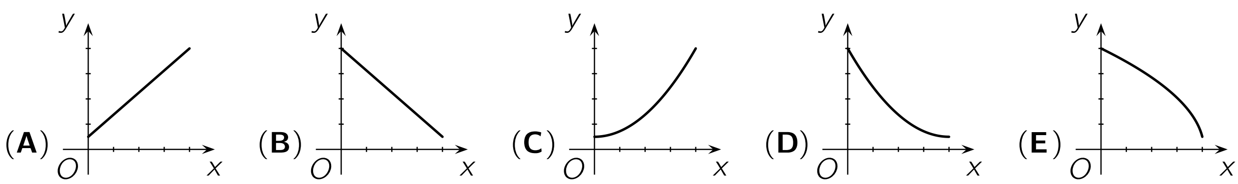
(**A**) 56 (**B**) 64 (**C**) 72 (**D**) 80 (**E**) 81

Lösung: Wir suchen alle dreistelligen Zahlen $\overline{abc}$, für die $\overline{cba} = \overline{abc} + 99$ gilt, das heisst $100c + 10b + a = 100a + 10b + c + 99$, woraus durch Umformen $c = a + 1$ folgt.
Die Hunderterziffer a einer solchen dreistelligen Zahl kann jede Ziffer von 1 bis 8 sein, die Einerziffer c ist damit eindeutig bestimmt. Die Zehnerziffer b kann jede Ziffer von 0 bis 9 sein, unabhängig davon, welchen Wert a hat. Das sind insgesamt $8 \cdot 10 = 80$ Zahlen.

Welche dreistellige Zahl ist 4,5-mal so gross wie die Zahl, die entsteht, wenn ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden?
Wie viele vierstellige natürliche Zahlen sind um 189 kleiner als die Zahl, die entsteht, wenn ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge geschrieben werden?

15. Beim gleichmässigen Abrollen einer Küchenrolle wird der Durchmesser y der Rolle mit der Zeit immer kleiner, während die Gesamtlänge x des bereits abgerollten Teils immer grösser wird. Welcher Graph stellt diesen Vorgang dar?





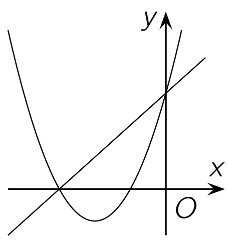
Lösung: Wir erkennen als erstes, dass bei den Graphen (**A**) und (**C**) beim Abrollen, das heisst bei wachsendem x, der Durchmesser y grösser wird. Das kann natürlich nicht stimmen.
Wir überlegen uns nun, was es für einen Unterschied gibt zwischen einem Zeitpunkt, an dem die Rolle sehr dick ist, und einem Zeitpunkt, an dem die Rolle sehr dünn ist. Wir betrachten dazu jeweils, wie viel Küchenpapier wir abrollen müssen, damit die Rolle um eine Schicht dünner wird. Das ist bei einer dicken Rolle offensichtlich mehr als bei einer dünnen Rolle. Daraus schliessen wir, dass der Durchmesser der Rolle umso schneller kleiner wird je dünner die Rolle ist. Das bedeutet, dass der Graph, der diesen Vorgang darstellt, mit steigendem x immer steiler wird. Das ist nur bei Graph (**E**) der Fall.

16. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 werden in beliebiger Reihenfolge nebeneinander geschrieben. Nun werden alle Summen von je drei nebeneinander stehenden Zahlen berechnet. Wie viele dieser Summen können *höchstens* ungerade sein?

(**A**) 97 (**B**) 96 (**C**) 95 (**D**) 94 (**E**) 93

Lösung: Insgesamt werden 98 Summen berechnet. Wir zeigen als erstes, dass nicht alle 98 Summen ungerade sein können. Stehen nirgends in der Reihe zwei ungerade Zahlen direkt nebeneinander, so stehen gerade (g) und ungerade (u) Zahlen immer abwechselnd. Die Summanden der Summen sind abwechselnd $g\,u\,g$ und $u\,g\,u$. Also sind die Summen abwechselnd ungerade und gerade, es sind somit genau 49 Summen ungerade. Andernfalls stehen in der Reihe an einer Stelle zwei ungerade Zahlen direkt nebeneinander. Dann stehen neben der dazu dichtgelegendsten geraden Zahl auf einer Seite zwei ungerade Zahlen ($g\,u\,u$ oder $u\,u\,g$). Die Summe dieser drei Zahlen ist also gerade, und somit sind höchstens 97 Summen ungerade. Wir überlegen, ob es eine Anordnung gibt, bei der 97 Summen ungerade sind. Dann kann es den Fall, dass eine gerade Zahl auf einer Seite an zwei ungerade Zahlen grenzt, nur einmal geben. Das folgende Beispiel zeigt, dass das möglich ist: $\underbrace{g\,g\,u\ldots g\,g\,u}_{\text{25-mal}}\,\underbrace{u\ldots u}_{\text{25-mal}}$.

17. Die Abbildung zeigt die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ für drei verschiedene reelle Zahlen a, b, c sowie eine Gerade. Welche Gleichung könnte diese Gerade haben?



(**A**) $y = bx + c$ (**B**) $y = cx + b$ (**C**) $y = ax + b$
(**D**) $y = ax + c$ (**E**) $y = cx + a$

Lösung: Der Wert der quadratischen Funktion bei $x = 0$ ist gleich $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Denselben Wert muss auch die lineare Funktion bei $x = 0$ haben, also kommen nur (**A**) und (**D**) in Frage. Hätte die Gerade die Gleichung in (**A**), so würde für die gemeinsame Nullstelle x_0 ($\neq 0$) der beiden Funktionen folgen, dass $ax_0^2 + bx_0 + c = bx_0 + c$ und somit $a = 0$ gelten. Da aber für die Parabel $a \neq 0$ gilt, ist (**D**) die Lösung.
Dass (**D**) auch wirklich möglich ist, zeigen wir mithilfe eines Beispiels und nehmen $a = 1$ an. Es seien A und B die Nullstellen von $f(x) = x^2 + bx + c$ mit $A < B < 0$. Dann gilt $f(x) = (x - A)(x - B)$ und die lineare Funktion muss A als Nullstelle, also die Form $g(x) = x - A$ haben. Desweiteren muss $f(0) = g(0)$ gelten, also $AB = -A$ bzw. $B = -1$. Daraus ergibt sich unter anderem das Beispiel $f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$ mit $g(x) = x + 2$.

18. Ahmed will die Zahlen von 1 bis 25 so in das 5×5-Feld eintragen, dass die fünf Zahlen in jeder Zeile und die fünf Zahlen in jeder Spalte jeweils dieselbe Summe haben. Einige Zahlen hat Ahmed schon eingetragen. Welche Zahl muss Ahmed in das Feld mit dem Fragezeichen eintragen?

	24		5	
22		17		4
	11		15	
25		9		1
	2		?	

(**A**) 7 (**B**) 12 (**C**) 14 (**D**) 19 (**E**) 21

	24		5	
22	a	17	c	4
	11		15	
25	b	9	d	1
	2		x	

7	24	6	5	23
22	12	17	10	4
8	11	13	15	18
25	16	9	14	1
3	2	20	21	19

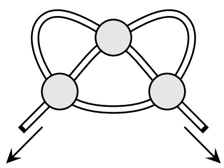
Lösung: Wir füllen die 2. und die 4. Spalte mit Variablen auf (siehe linkes Bild). Da die Summe der Zahlen in jeder Reihe gleich ist, ist die Summe der Zahlen in der 2. und 4. Spalte gleich der Summe der Zahlen in der 2. und 4. Zeile. Das heisst $(24 + a + 11 + b + 2) + (5 + c + 15 + d + x) = (22 + a + 17 + c + 4) + (25 + b + 9 + d + 1)$ und somit $x = 21$. Das rechte Bild zeigt, dass sich das Quadrat auch wirklich vollständig so ausfüllen lässt, dass die Summe der Zahlen in jeder Reihe (sogar auch in den beiden Diagonalen) gleich, das heisst gleich 65, ist.

19. Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert. Es gilt $f(1) = 2$, und für alle reellen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Dann ist $\dfrac{f(2021)}{f(2020)} =$

(**A**) 2 (**B**) $\dfrac{2020}{2021}$ (**C**) 2022 (**D**) $\dfrac{2022}{2021}$ (**E**) 4044

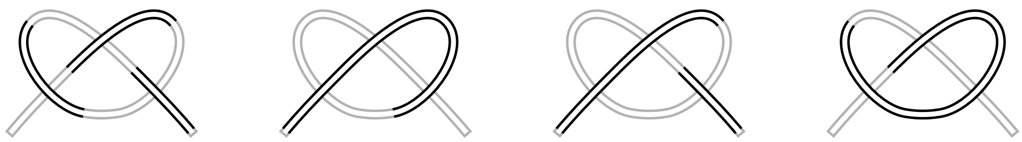
Lösung: Es ist $\dfrac{f(2021)}{f(2020)} = \dfrac{f(2020+1)}{f(2020)} = \dfrac{f(2020) \cdot f(1)}{f(2020)} = f(1) = 2$. Es lassen sich $f(2020)$ und $f(2021)$ aber auch wie folgt explizit berechnen: $f(2020) = f(1+2019) = f(1) \cdot f(2019) = f(1) \cdot f(1+2018) = f(1)^2 \cdot f(2018) = \ldots = f(1)^{2020} = 2^{2020}$ und analog $f(2021) = 2^{2021}$.

20. Isa legt ein Stück Seil wie abgebildet auf den Tisch. Dabei legt sie an jedem der drei Kreuzungspunkte unabhängig voneinander das Seil so oder so , und zwar jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Seil verknotet, wenn Isa an den beiden Seilenden zieht?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{8}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{3}{8}$

Lösung: Liegt das Seil am oberen Kreuzungspunkt so , so verknotet sich das Seil genau dann, wenn links und rechts das Seil so liegt. In den anderen 3 Fällen (links und rechts so , links so und rechts so bzw. umgekehrt links so und rechts so) ergibt sich kein Knoten. Liegt das Seil am oberen Kreuzungspunkt so , so verknotet sich das Seil genau dann, wenn links und rechts das Seil so liegt, und in den anderen 3 Fällen nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Seil verknotet, ist also $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
Die Bilder zeigen die 4 Möglichkeiten im ersten Fall, wenn oben das Seil so liegt. Beim ersten Bild verknotet sich das Seil. Beim zweiten und dritten Bild wird sich beim Ziehen an den Seilenden die linke (graue) Schlaufe hinter dem schwarzen Teil vollständig vorbeiziehen, sodass kein Knoten entsteht. Beim vierten Bild zieht sich die rechte (schwarze) Schlaufe vor dem grauen Teil vollständig vorbei.



21. Unser Basketballteam hat das letzte Spiel gewonnen. Die 7 Spieler haben 1, 2, 7, 9, 10, 15 und 19 Punkte erzielt. Die drei grössten Spieler haben zusammen doppelt so viele Punkte erzielt wie die drei kleinsten Spieler zusammen. Wie viele Punkte hat der viertgrösste Spieler erzielt?

(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 15 (**E**) 19

Lösung: Alle 7 Spieler zusammen haben $1+2+7+9+10+15+19 = 63$ Punkte erzielt. Die Anzahl der Punkte, die die drei kleinsten und die drei grössten Spieler zusammen erzielt haben, ist gleich der dreifachen Anzahl der Punkte, die die drei kleinsten Spieler zusammen erzielt haben. Deshalb muss diese Anzahl durch 3 teilbar sein. Da 63 durch 3 teilbar ist, muss folglich auch die Anzahl der Punkte, die der viertgrösste Spieler erzielt hat, durch 3 teilbar sein, also entweder 9 oder 15 sein. Bei 9 hätten die drei kleinsten Spieler zusammen $(63-9) : 3 = 18$ Punkte und bei 15 hätten sie $(63-15) : 3 = 16$ Punkte erzielt. 18 lässt sich als Summe von drei dieser Zahlen schreiben (ohne die 9 zu benutzen): $18 = 1 + 2 + 15$. Bei 16 ist das hingegen nicht möglich. Also ist (**B**) die Lösung.

— *In Klassenstufe 9/10 wurde ein ähnliches Problem in Aufgabe 18 gestellt.* —

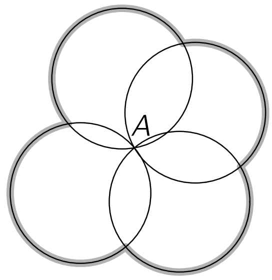
22. Jesse und Liv spielen Schiffe versenken auf etwas andere Art. Jesse stellt ein Schiff auf eines der vier Felder (s. Abb.). Liv versucht, den Standort des Schiffs herauszufinden. Dazu fragt sie nach einem der vier Felder. Wenn das Schiff dort ist, ist das Spiel vorbei. Wenn nicht, schiebt Jesse das Schiff um ein Feld nach rechts oder links und Liv darf erneut nach einem Feld fragen. Mit welcher der folgenden Abfolgen von Abfragen findet Liv das Schiff ganz sicher?

1	2	3	4

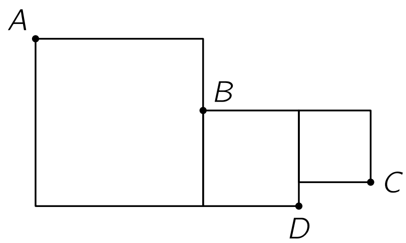
(**A**) 1,2,3,4,1,2,3,4 (**B**) 1,2,3,4,3,2,1 (**C**) 1,3,1,3,1,3 (**D**) 1,4,4,1,1 (**E**) 2,3,3,2

Lösung: Mit der Abfolge 2,3,3,2 findet Liv das Schiff mit Sicherheit: Stellt Jesse das Schiff zu Beginn auf Feld 2, so findet es Liv gleich bei der ersten Abfrage. Stellt Jesse das Schiff zu Beginn auf Feld 4, so muss er es nach der ersten Abfrage auf Feld 3 schieben. Dort findet es Liv dann bei der zweiten Abfrage. Stellt Jesse das Schiff zu Beginn auf Feld 1 oder 3, so muss er es nach der ersten Abfrage auf Feld 2 oder 4 und nach der zweiten Abfrage auf Feld 1 oder 3 schieben. Schiebt er es dabei auf Feld 3, so findet es Liv bei der dritten Abfrage. Andernfalls, wenn er es auf Feld 1 schiebt, dann muss er es nach der dritten Abfrage auf Feld 2 schieben, wo Liv es dann schliesslich bei der vierten Abfrage findet.
Dass das Schiff bei den anderen Abfolgen nicht sicher gefunden werden kann, zeigen die folgenden denkbaren Züge von Jesse: (**A**) 4,3,2,1,2,3,4,3, (**B**) 2,1,2,1,2,1,2, (**C**) 3,4,3,4,3,4, (**D**) 2,1,2,3,2.

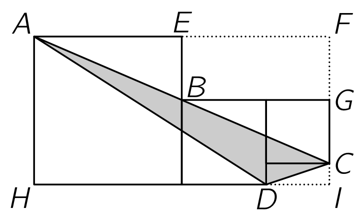
Vier Kreise mit dem Radius 1 cm *schneiden einander in einem gemeinsamen Punkt A. Welchen Umfang hat die gesamte Figur?*



23. Rechts sind drei Quadrate abgebildet. Die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden. Der Flächeninhalt des linken Quadrats ist $49\,\text{cm}^2$ und der Flächeninhalt des mittleren Quadrats ist $16\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ADC?

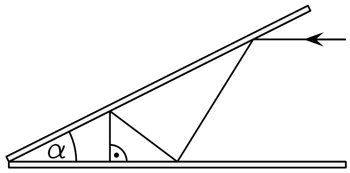


(**A**) $24{,}5\,\text{cm}^2$ (**B**) $22\,\text{cm}^2$ (**C**) $18{,}5\,\text{cm}^2$ (**D**) $16\,\text{cm}^2$ (**E**) $14{,}5\,\text{cm}^2$



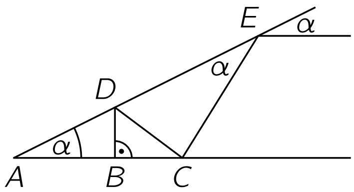
Lösung: Die Seitenlänge des linken Quadrats ist 7 cm und die des mittleren Quadrats ist 4 cm. Die Seitenlänge des rechten Quadrats bezeichnen wir mit x. Wir verlängern die Seiten $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ bis zum Schnittpunkt F. Da BE und CF parallel zueinander sind, gilt nach dem 2. Strahlensatz $\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|CF|}$. Einsetzen der Werte führt zu $\frac{7\,\text{cm}}{7\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + x} = \frac{7\,\text{cm} - 4\,\text{cm}}{x + (7\,\text{cm} - 4\,\text{cm})}$. Lösen wir die Gleichung nach x auf, erhalten wir $x = 3\,\text{cm}$.
Der Flächeninhalt von $\triangle ADC$ lässt sich nun auf verschiedene Weisen berechnen. Wir können z. B. vom Flächeninhalt des Rechtecks $HIFA$ die Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke HDA, DIC und CFA abziehen: $A_{\triangle ADC} = A_{\square HIFA} - A_{\triangle HDA} - A_{\triangle DIC} - A_{\triangle CFA} = 14\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} - \frac{1}{2} \cdot 11\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} - \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} - \frac{1}{2} \cdot 14\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 98\,\text{cm}^2 - 38{,}5\,\text{cm}^2 - 1{,}5\,\text{cm}^2 - 42\,\text{cm}^2 = 16\,\text{cm}^2$.

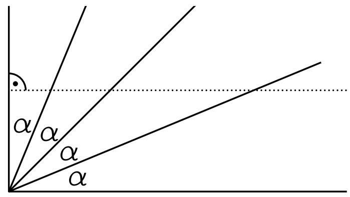
24. Zwei Spiegel sind wie abgebildet zusammengefügt und schliessen einen Winkel der Grösse α ein. Ein Lichtstrahl fällt parallel zu einem der Spiegel ein und wird nach der vierten Reflexion auf dem gleichen Weg zurückgeworfen. Wie gross ist α? (*Abb. nicht massstabsgerecht*)



(**A**) 10° (**B**) 15° (**C**) 22,5° (**D**) 30° (**E**) 45°

Lösung: Der einfallende Lichtstrahl schliesst bei E mit dem oberen Spiegel einen Winkel der Grösse α ein, da der Lichtstrahl parallel zum unteren Spiegel verläuft. In E gilt für den Winkel zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Spiegel folglich $\measuredangle DEC = \alpha$, und der Winkel zwischen einfallendem und reflektierten Lichtstrahl ist $180° - 2\alpha$ gross. In C haben die beiden Winkel zwischen Lichtstrahl und Spiegel die Grösse 2α. Nun folgt der Reihe nach: $\measuredangle ECD = 180° - 4\alpha$ (gestreckter Winkel), $\measuredangle CDE = 3\alpha$ (Innenwinkelsumme im Dreieck), $\measuredangle ADB = 3\alpha$ (Reflexion), $\measuredangle BDC = 180° - 6\alpha$ (gestreckter Winkel), $\measuredangle CBD = 4\alpha$ (Innenwinkelsumme im Dreieck). Also gilt $4\alpha = 90°$, d. h. $\alpha = 22{,}5°$. Das Prinzip, wie der Lichtstrahl reflektiert wird, lässt sich gut darstellen, indem wir nacheinander zuerst am oberen Spiegel spiegeln, dann am Spiegelbild des unteren Spiegels usw. Dann erscheint der Lichtstrahl als Verlängerung des einfallenden Strahls und wir sehen, dass $4\alpha = 90°$ gilt.

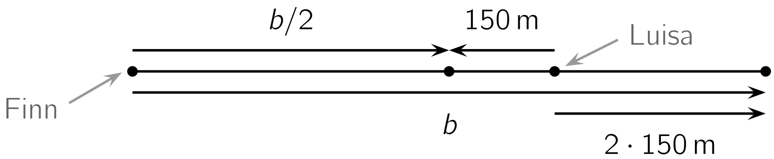




25. Finn rennt mit konstanter Geschwindigkeit seiner Freundin Luisa hinterher, die gerade, ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit, über eine Brücke geht. Würde Luisa umkehren, sobald Finn die Brücke betritt, würde sie Finn nach 150 Metern in der Mitte der Brücke treffen. Doch Luisa bemerkt ihn nicht, und so holt Finn sie erst am Ende der Brücke ein. Wie lang ist die Brücke?

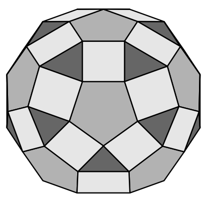
(**A**) 525 m (**B**) 600 m (**C**) 750 m (**D**) 775 m (**E**) 900 m

Lösung: Würde Luisa umkehren, so würde sie 150 m und Finn die halbe Brückenlänge laufen. Da sie ihn aber nicht bemerkt, läuft Finn die gesamte Brückenlänge, also eine doppelt so lange Strecke. Also läuft auch Luisa die doppelte Strecke, nämlich $2 \cdot 150\,\text{m} = 300\,\text{m}$.



Die halbe Brückenlänge beträgt somit $150\,\text{m} + 300\,\text{m} = 450\,\text{m}$. Also ist die Brücke 900 m lang.

26. Die Abbildung zeigt ein Polyeder, das nur aus gleichseitigen Dreiecken, Quadraten und regelmässigen Fünfecken besteht. Jedes Fünfeck grenzt an fünf Quadrate, jedes Dreieck grenzt an drei Quadrate und jedes Quadrat grenzt an zwei Dreiecke und zwei Fünfecke. Insgesamt sind es 12 Fünfecke. Wie viele Dreiecke sind es?

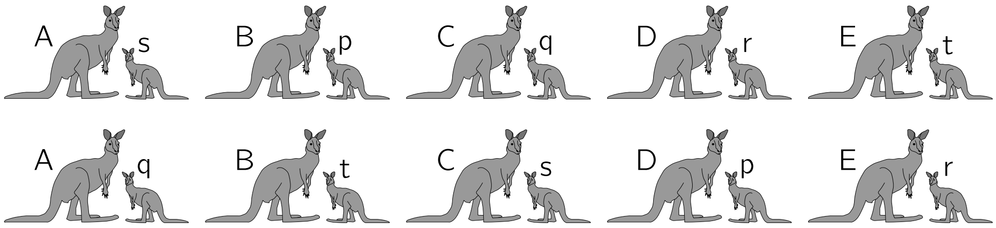


(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 24 (**D**) 25 (**E**) 30

Lösung: Die Anzahl der Quadrate bezeichnen wir mit Q und die der Dreiecke mit D. Wir untersuchen, wie viele Kanten sowohl zu einem Quadrat als auch zu einem Fünfeck gehören: Da jedes Quadrat an zwei Fünfecke grenzt, gibt es einerseits $2 \cdot Q$ solche Kanten. Da jedes Fünfeck an fünf Quadrate grenzt, gibt es andererseits $5 \cdot 12 = 60$ solche Kanten. Daraus schlussfolgern wir $Q = 30$. Analog erhalten wir für die Anzahl von Kanten, die sowohl zu einem Quadrat als auch zu einem Dreieck gehören, $2 \cdot Q = 3 \cdot D$. Also sind es $D = 20$ Dreiecke.

— In der ähnlichen Aufgabe 26 in Klassenstufe 7/8 war ein anderes Polyeder zu untersuchen. —

27. Fünf junge Kängurus p, q, r, s, t stehen mit ihren fünf Müttern A, B, C, D, E in einer Reihe.

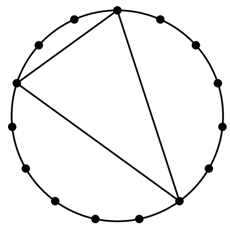


In der oberen Reihe stehen genau zwei der jungen Kängurus bei ihrer Mutter. In der unteren Reihe stehen genau drei der jungen Kängurus bei ihrer Mutter. Welches Känguru ist die Mutter von p?

(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

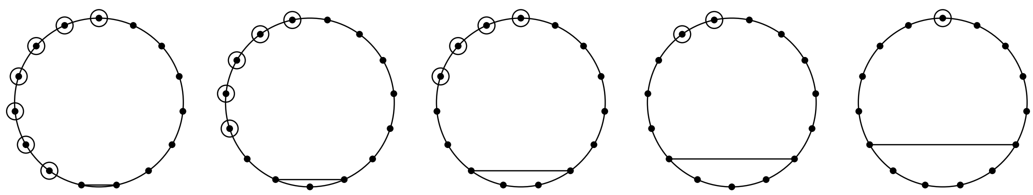
Lösung: Jedes junge Känguru steht in den beiden Reihen bei zwei verschiedenen Kängurus. Das bedeutet, dass die beiden jungen Kängurus x und y, die in der oberen Reihe bei ihrer Mutter stehen, in der unteren Reihe nicht bei ihrer Mutter stehen. Damit stehen die drei anderen jungen Kängurus in der unteren Reihe bei ihrer Mutter. Das geht aber nur, wenn in der unteren Reihe x bei der Mutter von y und y bei der Mutter von x steht. Sie haben also im Vergleich zur oberen Reihe die Plätze gewechselt. Das einzige Paar, das von der oberen Reihe zur unteren Reihe die Plätze gewechselt hat, sind s und q. Also sind die Mutter-Kind-Paare: A-s, B-t, C-q, D-p, E-r. Die Mutter von p ist D.

28. Auf einem Kreis sind 15 Punkte so markiert, dass benachbarte Punkte stets denselben Abstand haben. Verbindet man drei dieser Punkte, so entsteht ein Dreieck. Wie viele verschiedene, nicht kongruente Dreiecke lassen sich so zeichnen?



(**A**) 19 (**B**) 46 (**C**) 15 (**D**) 75 (**E**) 23

Lösung: Jedes solche Dreieck hat eine kürzeste Seite (eventuell auch mehrere). Wir drehen diese nach unten. Wir betrachten nur solche Dreiecke, bei denen die linke Seite nicht länger ist als die rechte Seite. So gehen wir sicher, dass wir kongruente Dreiecke nicht mehrfach zählen. Nun zählen wir systematisch, wie viele Dreiecke es gibt. Dabei beachten wir, dass die linke Seite nicht kürzer ist als die untere Seite, die wir als kürzeste gewählt haben:



Insgesamt lassen sich $7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 19$ nicht kongruente Dreiecke zeichnen.

Wir geben eine zweite Lösung an, bei der wir einerseits alle denkbaren Dreiecke zählen (das sind $\binom{15}{3}$) und andererseits, welche Sorten Dreiecke es gibt und wie viele davon zueinander kongruent sind. Zuerst bemerken wir, dass es genau 1 gleichseitiges Dreieck gibt. Dann sehen wir, indem wir die Spitze oben fixieren, dass es genau 6 nicht-kongruente gleichschenklige Dreiecke gibt, die nicht gleichseitig sind. Wählen wir drei beliebige markierte Punkte, so bilden sie die Ecken eines Dreiecks. Das gleichseitige Dreieck erhalten wir bei 5 dieser Auswahlen (jeweils gedreht), und jedes der anderen gleichschenkligen Dreiecke bei 15 dieser Auswahlen (ebenfalls jeweils gedreht). Alle anderen Dreiecke erhalten wir bei 30 dieser Auswahlen (gedreht und/oder gespiegelt). Sei n die Anzahl der gesuchten Dreiecke. Dann gilt $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1 \cdot 5 + 6 \cdot 15 + (n-7) \cdot 30$. Daraus folgt $455 = 95 + (n-7) \cdot 30$, also $n = 19$.

29. Emma und Linda werfen eine Münze. Jedes Mal, wenn Zahl kommt, erhält Emma einen Punkt, bei Kopf erhält Linda einen Punkt. Das Spiel gewinnt, wer zuerst drei Punkte mehr als die andere hat. Beim ersten Wurf kommt Zahl. Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Emma gewinnt?

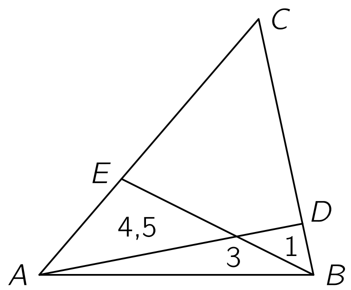
(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{2}{3}$ (**C**) $\frac{3}{4}$ (**D**) $\frac{4}{5}$ (**E**) $\frac{5}{6}$

Lösung: Da jeder Münzwurf nicht von den anderen Münzwürfen abhängt, ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen nur vom aktuellen Vorsprung abhängig. Wir definieren p_k für $k = 0, 1, 2, 3$ als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Emma gewinnen wird, wenn sie k Punkte Vorsprung hat. Die Aufgabe besteht darin p_1 zu bestimmen.
Es gilt $p_3 = 1$, da laut Spielregeln Emma gewinnt, wenn sie 3 Punkte Vorsprung hat. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für beide am Spielbeginn gleich $\frac{1}{2}$, das heisst $p_0 = \frac{1}{2}$. Wenn Emma 1 Punkt Vorsprung hat, dann hat sie nach dem nächsten Wurf entweder 0 Punkte oder 2 Punkte Vorsprung, je nachdem, ob Kopf oder Zahl geworfen wird. Folglich gilt $p_1 = \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_2$. Analog gilt $p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3$.
Daraus folgt

$$p_1 = \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p_1.$$

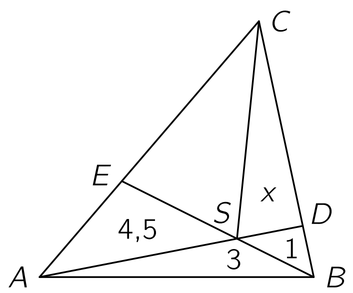
Lösen wir nach p_1 auf, so erhalten wir $p_1 = \frac{2}{3}$.

30. Das Dreieck ABC wurde durch die zwei Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ in vier Teile geteilt. Die Flächeninhalte der drei kleinen Dreiecke sind wie angegeben 1, 3 und 4,5. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC?



(**A**) 18 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 24

Lösung: Wir bezeichnen mit S den Schnittpunkt von AD mit BE und zeichnen die Hilfslinie $\overline{CS}$ ein. Den Flächeninhalt von $\triangle SDC$ bezeichnen wir mit x. Da S ein Punkt auf der Geraden AD ist, haben $\triangle SAB$ und $\triangle DSB$ bezüglich der Grundseite $\overline{SA}$ bzw. $\overline{DS}$ dieselbe Höhe. Folglich ist $|\overline{SA}| = 3 \cdot |\overline{DS}|$. Daraus folgt $A_{\triangle ASC} = 3 \cdot A_{\triangle SDC} = 3x$ und somit $A_{\triangle ESC} = 3x - 4{,}5$. Da S auch auf der Geraden BE liegt, gilt analog $A_{\triangle ESC} = \frac{4{,}5}{3} \cdot A_{\triangle SBC}$. Das heisst $3x - 4{,}5 = \frac{4{,}5}{3} \cdot (x + 1)$ bzw. $x = 4$. Somit ist $A_{\triangle ABC} = 4{,}5 + 3 + 1 + x + (3x - 4{,}5) = 20$.



Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	E	C	B	A	A	A	E	B

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	E	B	A	E	D	B	C	D	C

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	A	B	B	D	E	C	D	B

(In den Klassenstufen 7 und 8 wurde bei Aufgabe 11 auch die Antwort A als richtig gewertet.)

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 9 und 10 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	A	C	D	C	B	C	D	E

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	B	C	A	A	C	E	A	E	C	E

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	E	B	A	D	B	C	D	B	A	B

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 11 bis 13 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	E	B	A	C	A	E	E	D	B	C

Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	C	D	D	E	A	D	E	A	B

Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	B	E	D	C	E	B	D	A	B	B

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.