2021

Mathe mit dem Känguru

Knobeleien, Kopfnüsse, Logikrätsel und Basteleien

... und die Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 3 bis 8

Liebe Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2021“

Letztes Jahr bekam der immer im März stattfindende Mathematik-Wettbewerb in der Schweiz eine spezielle Form. Wegen der schwierigen Pandemiezustände haben wir das Wettbewerbsmaterial den angemeldeten Schulen zur individuellen Verwendung zur Verfügung gestellt. Teilweise wurden die Aufgaben den Teilnehmenden nach Hause mitgegeben, wo sie eine Abwechslung zum Fernunterricht darstellten. Teilweise wurden sie erst später im Klassenverband gelöst. Wir haben trotz der unüblichen Durchführung einige gute Rückmeldungen bekommen und sind froh darüber, dass die am internationalen Meeting in Chicago vom November 2019 zusammengestellten Aufgaben schliesslich eine gute Verwendung gefunden haben.

Dieses Jahr scheint die Durchführung des Wettbewerbs fast wieder die normale Form gefunden zu haben. Es haben sich zwar einige Schulen abgemeldet, weil die immer noch schwierige Pandemiesituation keine Durchmischung von Schulklassen zuliess. Aber dank vieler neuangemeldeter Schulen und dank der neuen Möglichkeit, den Wettbewerb jetzt auch online zu absolvieren, haben wir fast wieder gleich viele Anmeldungen bekommen wie letztes Jahr.

Das Interessante und Vielgestaltige der Känguru-Aufgaben, die sich ein wenig von Aufgaben aus Lehrbüchern und anderen Tests unterscheiden, rührt vor allem daher, dass unterschiedliche Ideen, Traditionen und Herangehensweisen aus den verschiedenen Teilnehmerländern und Kulturen einfliessen. Nebst richtigem Rechnen waren vor allem kluges Denken, geschicktes Kombinieren, ein gutes Gefühl für Grössenordnungen, etwas Vorstellungsvermögen und eine Portion Logik gefragt. Im Mathematikunterricht werden diese Fertigkeiten in besonderem Masse gelehrt, gelernt und geübt.

Diese Broschüre enthält die Aufgaben der Klassenstufen 3 bis 8. Beim Känguru-Wettbewerb sind in den Klassenstufen 3 bis 6 jeweils 24 Aufgaben zu lösen (ab Klassenstufe 7/8 sind es 30 Aufgaben). Jede Teilnehmerin und jeder Teilnehmer bekommt eine Startpunktzahl von 24 (bzw. 30) Punkten. Bei einer richtigen Antwort werden die vorgesehenen 3, 4 oder 5 Punkte hinzuaddiert. Wird keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Bei einer falschen Antwort wird ein Viertel der vorgesehenen Punkte abgezogen. So ist 0 die niedrigste mögliche Gesamtpunktzahl, und die erreichbare Höchstpunktzahl beträgt 120 (bzw. 150) Punkte.

Viel Freude mit Mathematik wünschen

Monika Noack und Alexander Unger
Mathematikwettbewerb Känguru e. V.

Meike Akveld und Werner Durandi
Känguru Schweiz

Die Aufgaben und der Inhalt der Broschüre wurden von M. Altmann, Dr. M. Noack, P. Schmolke und A. Unger unter Mitwirkung von M. Cannizzo, C. Czekay, L. Fischer, N. Hadjimina, B. Hell, B. und U. Hutschenreiter, L. Jahn, Dr. M. Jarmer, B. Maier, Dr. A. Noack, S. Schlinske, A. Stahel und Dr. D. Vigerske erarbeitet.

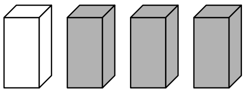
Herausgegeben von Mathematikwettbewerb Känguru e. V.
c/o Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, 10099 Berlin

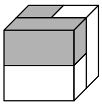
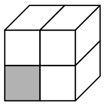
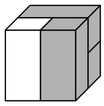
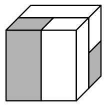
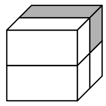
Umschlaggestaltung: Steffen Blankenburg, www.elephant-castle.de

Organisation Schweiz: Verein «Känguru Schweiz»: www.kaenguru-schweiz.ch

Druck: Druckerei Odermatt AG, 6368 Dallenwil

Klassenstufen 3 und 4

1. Welcher der 5 Würfel kann aus den 4 Bausteinen  gebaut werden?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

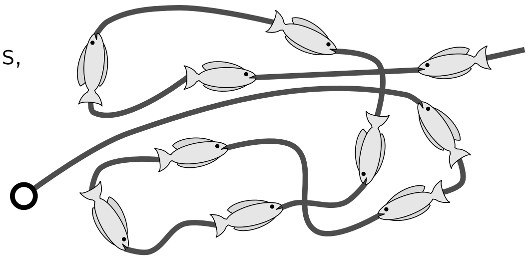
Lösung: Aus einem hellen Baustein und 3 dunklen besteht nur der Würfel bei (**C**), das ist der gesuchte. — *Dasselbe Problem mit 6 Bausteinen wurde in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 1 gestellt.* —

2. Welche Rechnung mit den Ziffern der Jahreszahl 2021 hat das grösste Ergebnis?

(**A**) $2-0+2+1$ (**B**) $2+0-2+1$ (**C**) $2-0-2+1$
(**D**) $2+0+2-1$ (**E**) $2-0+2-1$

Lösung: Wir berechnen der Reihe nach die 5 Ergebnisse. Die 0 können wir beim Rechnen ignorieren, denn sie trägt hier nichts zu den Ergebnissen bei. (**A**) $2-0+2+1=5$, (**B**) $2+0-2+1=1$, (**C**) $2-0-2+1=1$, (**D**) $2+0+2-1=3$, (**E**) $2-0+2-1=3$.
Das grösste Ergebnis hat die Rechnung bei (**A**).

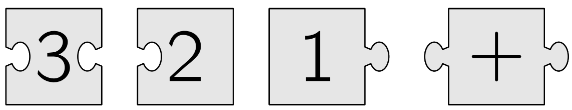
3. Wie viele Fische zeigen mit dem Kopf in Richtung des Rings, wenn die Leine gerade gezogen wird?



(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

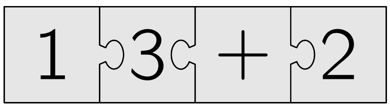
Lösung: Wir beginnen beim Ring und fahren in Gedanken oder mit dem Finger die Leine entlang. Dabei zählen wir alle Fische, die wir zuerst am Kopf treffen, und das sind 6.

4. Richtig zusammengelegt, ergeben die 4 Puzzleteile eine Rechenaufgabe. Welches Ergebnis hat diese?



(**A**) 6 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 24 (**E**) 33

Lösung: Das Puzzleteil mit der 2 muss ganz nach rechts und das mit der 1 ganz nach links gelegt werden. Dann muss das Puzzle wie rechts abgebildet aussehen. Das Ergebnis der Rechenaufgabe ist $13+2=15$.



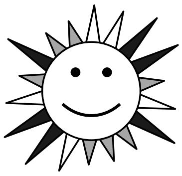
— *In den Klassenstufen 5/6 und 7/8 gab es ähnliche Puzzleprobleme in Aufgabe 2 bzw. 6.* —

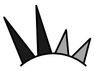
5. Die Glocken der Kirche neben der Schule läuten zur vollen Stunde so oft, wie es die Uhrzeit angibt. Wie viele Glockenschläge sind das zwischen 7:30 Uhr und 10:30 Uhr?

(**A**) 16 (**B**) 19 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 27

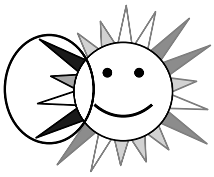
Lösung: Zwischen 7:30 Uhr und 10:30 Uhr läuten die Glocken zur vollen Stunde, das heisst um 8 Uhr, um 9 Uhr und um 10 Uhr. Insgesamt sind es daher $8+9+10=27$ Glockenschläge.

6. Ferdinand hat die Sonne im Bild rechts gemalt.
Welches Bild zeigt einen Ausschnitt von Ferdinands Sonne?



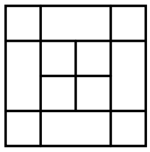
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Wir schauen die Bilder aufmerksam an, drehen sie im Kopf ein wenig hin und her und vergleichen mit der Sonne. Nur Bild (**D**) finden wir in der Sonne als Ausschnitt wieder, und zwar auf der linken Seite. Das ist das gesuchte Bild.

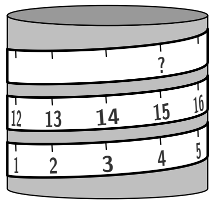


Wie viele Quadrate lassen sich rechts im Bild finden?

Und wie viele Rechtecke sind es?



7. Ein Massband ist ganz gleichmässig um eine runde Dose gewickelt. Welche Zahl gehört an die Stelle mit dem Fragezeichen?

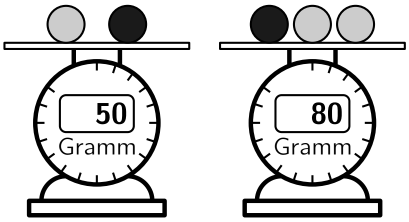


(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 29 (**D**) 30 (**E**) 32

Lösung: Da das Massband ganz gleichmässig um die Dose gewickelt ist, ist der Unterschied zwischen zwei direkt übereinander stehenden Zahlen immer der gleiche. Wir lesen ab, dass dieser Unterschied immer 11 ist. Also muss an der Stelle mit dem Fragezeichen $15 + 11 = 26$ stehen.

— Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 7 zu lösen. —

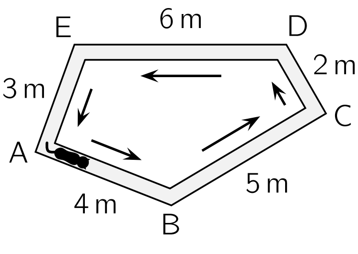
8. Lea hat 2 helle Murmeln und eine dunkle. Die 2 hellen Murmeln sind gleich schwer. Lea spielt mit der Küchenwaage, siehe Bild. Wie schwer ist die dunkle Murmel?



(**A**) 15 Gramm (**B**) 20 Gramm (**C**) 25 Gramm
(**D**) 35 Gramm (**E**) 40 Gramm

Lösung: Der Unterschied zwischen den angezeigten 50 Gramm und 80 Gramm entspricht einer hellen Murmel. Folglich wiegt eine helle Murmel 80 Gramm − 50 Gramm = 30 Gramm. Mit der linken Anzeige finden wir dann, dass die dunkle Murmel 50 Gramm − 30 Gramm = 20 Gramm wiegt.

9. Kater Toni läuft auf dem Rand eines fünfeckigen Beets immer in Richtung der Pfeile. Er startet an der Ecke A und läuft insgesamt 50 Meter. Wo ist Toni dann?



(**A**) zwischen A und B (**B**) zwischen B und C
(**C**) zwischen C und D (**D**) zwischen D und E
(**E**) zwischen E und A

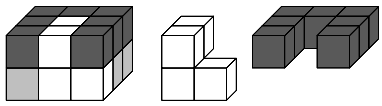
Lösung: Eine komplette Runde auf dem Rand des Beets ist $4\,\text{m} + 5\,\text{m} + 2\,\text{m} + 6\,\text{m} + 3\,\text{m} = 20\,\text{m}$ lang. Nach 2 Runden hat Kater Toni $2 \cdot 20\,\text{m} = 40\,\text{m}$ hinter sich. Läuft er weiter, so sind es bis zur Ecke B insgesamt $40\,\text{m} + 4\,\text{m} = 44\,\text{m}$ und bis zur Ecke C insgesamt $44\,\text{m} + 5\,\text{m} = 49\,\text{m}$. Bis zur Ecke D wären es insgesamt $49\,\text{m} + 2\,\text{m} = 51\,\text{m}$, also mehr als 50 m. Kater Toni ist somit zwischen C und D.

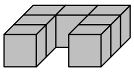
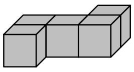
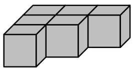
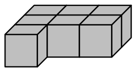
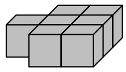
10. Lara räumt 19 leere Flaschen in 2 gleiche, leere Getränkekisten ein. Die erste macht sie voll. In der zweiten bleiben 5 Plätze frei. Wie viele Flaschen passen in eine Kiste?

(**A**) 18 (**B**) 15 (**C**) 13 (**D**) 12 (**E**) 10

Lösung: Hätte Lara noch 5 Flaschen für die 5 leeren Plätze in der zweiten Getränkekiste, so hätte sie 2 volle Kisten mit jeweils gleich vielen Flaschen. Dann wären es insgesamt $19 + 5 = 24$ Flaschen. Folglich passen in eine Kiste $24 : 2 = 12$ Flaschen.

11. Der Quader rechts besteht aus dem weissen Baustein, dem schwarzen Baustein und einem grauen Baustein. Wie sieht der graue Baustein aus?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

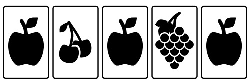
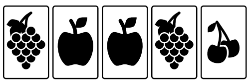
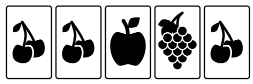
Lösung: Wir erkennen, dass der graue Baustein vollständig in der unteren Schicht des Quaders liegt. In der unteren Schicht sind nur die beiden Würfelchen vorn rechts weiss. Alle anderen sind grau und bilden den grauen Baustein. Das ist Baustein (**D**).

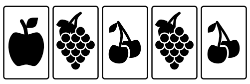
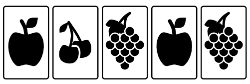
12. Mit 3 der Zahlenkarten $\boxed{5}\boxed{2}\boxed{8}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{7}$ bildet Lutz eine 3-stellige Zahl, und zwar die grösstmögliche mit einer ungeraden Ziffer und 2 geraden Ziffern. Welche ist das?

(**A**) 874 (**B**) 785 (**C**) 854 (**D**) 847 (**E**) 984

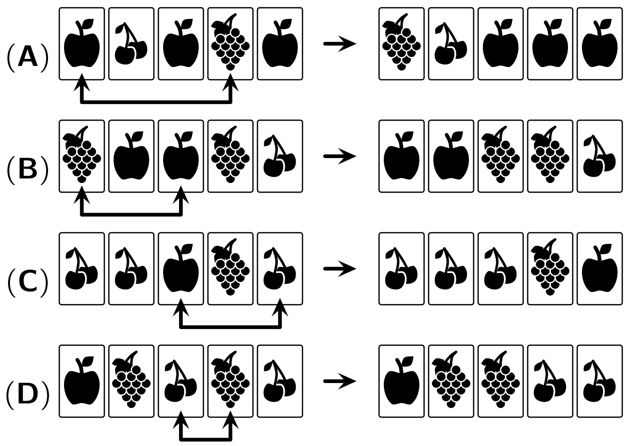
Lösung: Wir sortieren zuerst die verfügbaren Ziffern: 1, 5, 7 sind ungerade, 2, 4, 8 sind gerade. Lutz wählt eine ungerade und 2 gerade Ziffern, und zwar jeweils die grössten verfügbaren, da er die grösstmögliche 3-stellige Zahl daraus bildet. Er wählt also 7, 8 und 4. Um die grösste Zahl mit diesen Ziffern zu erhalten, muss Lutz die Ziffern nun von gross nach klein sortieren. Die gesuchte Zahl ist 874.

13. In 4 der 5 abgebildeten Reihen können 2 Karten so vertauscht werden, dass danach gleiche Karten nebeneinander liegen. Bei welcher Reihe klappt das nicht?

(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

Lösung: Rechts ist dargestellt, wie bei (**A**), (**B**), (**C**) und (**D**) durch das Vertauschen von 2 Karten erreicht werden kann, dass gleiche Karten nebeneinanderliegen.
Bei Reihe (**E**) klappt das nicht. Da die Trauben nicht nebeneinanderliegen, müssten wir eine der Traubenkarten mit einer anderen Karte vertauschen. Dafür kommen nur die rechte Apfelkarte und die Karte mit den Kirschen in Frage, damit die Trauben anschliessend nebeneinanderliegen. Dann liegen aber die Äpfel ganz gewiss nicht nebeneinander. Es ist also nicht möglich.



14. In einem kleinen Kino haben 5 Freunde eine ganze Reihe für sich. Paul sitzt nicht auf Platz 5. Anabel hat sich Platz 1 ausgesucht. Lynn sitzt direkt zwischen Josua und Selin. Wo sitzt Lynn?

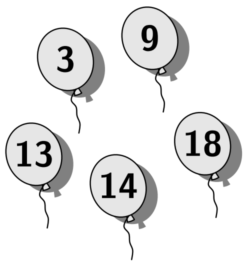
1	2	3	4	5

(**A**) auf Platz 1 (**B**) auf Platz 2 (**C**) auf Platz 3 (**D**) auf Platz 4 (**E**) auf Platz 5

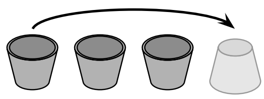
Lösung: Anabel hat sich Platz 1 ausgesucht, und somit bleiben für die anderen vier Kinder die Plätze 2 bis 5. Josua, Lynn und Selin bilden eine Dreiergruppe, und somit kann Paul nur auf Platz 2 oder auf Platz 5 sitzen. Da Paul nicht auf Platz 5 sitzt, muss er auf Platz 2 sitzen. Die Dreiergruppe mit Lynn in der Mitte sitzt auf den Plätzen 3, 4 und 5. Lynn sitzt also auf Platz 4.
Die Aufgabe lässt sich auch wie folgt lösen: Auf Platz 5 sitzt nicht Paul und auch nicht Anabel, denn sie sitzt auf Platz 1. Lynn sitzt auch nicht auf Platz 5, da sie zwischen zwei anderen Kindern sitzt. Also sitzt auf Platz 5 entweder Josua oder Selin. Folglich sitzt Lynn daneben auf Platz 4.

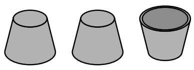
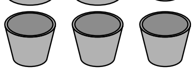
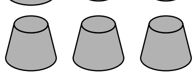
— *Ein etwas schwierigeres Anordnungsproblem war in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 18 zu lösen.* —

Im Geschenkeladen gibt es Luftballons mit Zahlen, allerdings nur noch die abgebildeten fünf.
Cosima möchte zum 30. Geburtstag ihrer mathematikbegeisterten Tante welche kaufen, und natürlich so, dass die Zahlen zusammen genau 30 ergeben.
Es gibt mehr als eine Möglichkeit dafür, aber einen Luftballon muss Cosima ganz sicher kaufen. Welchen?



15. Drei Becher stehen auf dem Tisch, so wie rechts im Bild. Til stellt den linken Becher nach rechts und dreht ihn dabei um. Das macht er insgesamt 10-mal. Wie stehen die Becher dann?



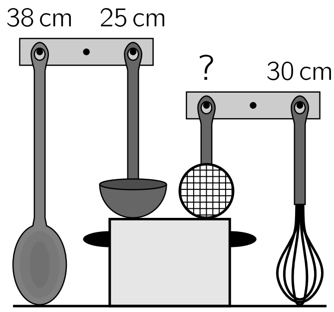
(**A**)  (**B**)  (**C**) 
(**D**)  (**E**) 

Lösung: Nach 3 Zügen stehen alle 3 Becher verkehrt herum auf dem Tisch. Nach 3 weiteren Zügen, also insgesamt 6, stehen sie wieder alle 3 richtig herum. Nach 3 weiteren Zügen, also insgesamt 9, stehen wieder alle 3 Becher verkehrt herum. Im 10. Zug wird der linke Becher nach rechts gestellt und dabei umgedreht, steht also wieder richtig herum. Die Becher stehen dann so wie in Bild (**A**).

16. Steffi hat 3 Packungen mit je 10 Müsliriegeln gekauft. Für eine grosse Wanderung nimmt sie einige Riegel aus der 1. Packung mit. Aus der 2. Packung nimmt sie so viele mit, wie noch in der 1. Packung übrig sind. Aus der 3. Packung nimmt sie 2 Riegel mit. Wie viele Müsliriegel lässt Steffi zu Hause?

(**A**) 2 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 16 (**E**) 18

Lösung: Wir wissen nicht, wie viele Müsliriegel Steffi aus der 1. Packung mitnimmt. Da sie aber aus der 2. Packung genauso viele mitnimmt, wie noch in der 1. Packung übrig sind, nimmt sie aus der 1. und 2. Packung zusammen genauso viele Müsliriegel mit, wie in einer vollen Packung sind, also 10. Es könnten aus diesen beiden Packungen also zum Beispiel 3 und 7 Müsliriegel sein oder auch andere Zahlen wie 5 und 5, in Summe sind es jedenfalls 10.
Dazu kommen 2 Müsliriegel aus der 3. Packung. Also nimmt Steffi insgesamt $10+2=12$ Müsliriegel mit. Die restlichen der insgesamt $3\cdot 10=30$ Müsliriegel lässt sie zu Hause, und das sind $30-12=18$.



17. Der Kochlöffel und der Schwingbesen neben dem Herd reichen genau bis zur Arbeitsplatte. Die Kelle und das Sieb reichen genau bis zu dem grossen Topf. Der Kochlöffel ist 38 cm lang, der Schwingbesen 30 cm und die Kelle 25 cm. Wie lang ist das Sieb?

(**A**) 17 cm (**B**) 16 cm (**C**) 15 cm (**D**) 14 cm (**E**) 13 cm

Lösung: Die Länge des Kochlöffels und die Länge der Kelle unterscheiden sich genau um die Höhe des Topfes. Der Topf ist folglich $38\,\text{cm} - 25\,\text{cm} = 13\,\text{cm}$ hoch. Da sich auch die Länge des Schwingbesens und die Länge des Siebs genau um die Höhe des Topfes unterscheiden, ist das Sieb somit $30\,\text{cm} - 13\,\text{cm} = 17\,\text{cm}$ lang.

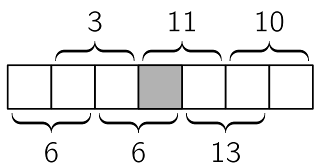
18. In einem Kartenspiel werden zu Beginn alle Karten gleichmässig an alle Spieler verteilt. Bei 2, 3 oder 4 Spielern klappt das, aber bei 5 Spielern bleibt eine Karte übrig. Aus wie vielen Karten könnte dieses Kartenspiel bestehen?

(**A**) 21 (**B**) 24 (**C**) 26 (**D**) 36 (**E**) 48

Lösung: Da sich die Karten gleichmässig an 2 Spieler verteilen lassen, ist die Anzahl der Karten gerade. Von den Antwortvorschlägen kommen also nur 24, 26, 36 oder 48 in Frage. Da sich die Karten auch gleichmässig an 3 Spieler verteilen lassen, kann die Anzahl der Karten ohne Rest durch 3 geteilt werden. Somit bleiben nur 24, 36 oder 48 als mögliche Kartenanzahl. Jede dieser 3 Zahlen kann ohne Rest durch 4 geteilt werden. Wir müssen noch die letzte Bedingung nutzen. Würden wir eine Karte entfernen, also bei den verbliebenen Möglichkeiten 23, 35 bzw. 47 Karten nehmen, könnten wir diese Karten gleichmässig auf 5 Spieler aufteilen. Das klappt nur bei 35 Karten. Also könnte das Kartenspiel aus 36 Karten bestehen.

Wie viele Karten muss ein Kartenspiel mindestens haben, damit die Karten an 2, 3, 4 und auch an 5 Spieler gleichmässig verteilt werden können?

19. Yusuf schreibt in die 7 Kästchen die Zahlen von 1 bis 7. Bei den Klammern steht jeweils die Summe der beiden Zahlen, die in die beiden dazugehörigen Kästchen gehören. Welche Zahl gehört in das graue Kästchen in der Mitte?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

5	1	2	4	7	6	4

4	2	1	5	6	7	3

Lösung: Wir erkennen, dass einmal die Summe 3 vorkommt. Da 3 nur als Summe von 1 und 2 entstehen kann, sind die beiden Zahlen in den zugehörigen Kästchen also 1 und 2, aber wir wissen noch nicht in welcher Reihenfolge. Wir probieren beide Möglichkeiten und füllen die restlichen Kästchen der Reihe nach aus, wie rechts dargestellt. Bei der ersten Möglichkeit kommt die 4 doppelt vor und die 3 fehlt. Nur bei der zweiten Möglichkeit kommt jede der Zahlen von 1 bis 7 einmal vor. In das graue Kästchen gehört also die 5.
Wer erkennt, dass bei den drei oberen Summen bis auf die ganz linke Zahl jede einmal eingerechnet ist, kann die Aufgabe auch anders lösen. Die Summe der Zahlen bis auf die ganz linke ist $3+11+10 = 24$. Die Summe aller einzutragenden Zahlen ist $1+2+3+4+5+6+7 = 28$. Also gehört in das linke Kästchen $28-24 = 4$. Nun können wir den Streifen von links beginnend ausfüllen, bis wir beim grauen Kästchen angekommen sind, in das wir die 5 eintragen müssen.

20. Dorotheas Vater hebt in der Bank 80 Franken ab. Der Geldautomat kann 10-Franken-Scheine, 20-Franken-Scheine und 50-Franken-Scheine ausgeben. Dorothea überlegt, wie die 80 Franken zusammengestellt sein können. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

Lösung: Wir schreiben systematisch alle Möglichkeiten auf, beginnend mit den grössten Scheinen. Es gibt 7 Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
80 \text{ Franken} &= 1 \cdot 50 \text{ Franken} + 1 \cdot 20 \text{ Franken} + 1 \cdot 10 \text{ Franken}\\
&= 1 \cdot 50 \text{ Franken} + 3 \cdot 10 \text{ Franken}\\
&= 4 \cdot 20 \text{ Franken}\\
&= 3 \cdot 20 \text{ Franken} + 2 \cdot 10 \text{ Franken}\\
&= 2 \cdot 20 \text{ Franken} + 4 \cdot 10 \text{ Franken}\\
&= 1 \cdot 20 \text{ Franken} + 6 \cdot 10 \text{ Franken}\\
&= 8 \cdot 10 \text{ Franken}
\end{aligned}$$

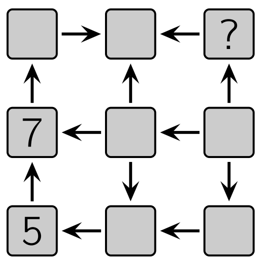
Diana hat einige 5-Franken-, 10-Franken- und 20-Franken-Scheine und will damit ein neues Headset für 95 Franken kaufen. Wie viele Scheine benötigt sie mindestens, wenn sie passend zahlen möchte?

21. Hahn Nero prüft regelmässig, wie viele Eier seine 5 Hennen legen. In den letzten 2 Wochen hat Adele 7 Eier gelegt, Bärbel 5, Cordula 6, Dörte 2 und Elvira sogar 16. Jede Henne legt nur weisse oder nur braune Eier. Weisse Eier waren es 3-mal so viele wie braune Eier. Welche Hennen legen braune Eier?

(**A**) Adele und Cordula (**B**) Bärbel und Cordula (**C**) Bärbel und Dörte
(**D**) Cordula und Dörte (**E**) Adele und Dörte

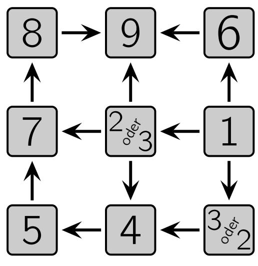
Lösung: Da es 3-mal so viele weisse Eier wie braune waren, ist die Anzahl aller Eier 4-mal so gross wie die Anzahl der braunen Eier. Weil es insgesamt $7+5+6+2+16=36$ Eier waren, waren davon folglich $36:4=9$ Eier braun. Die einzige Möglichkeit, mit den genannten Zahlen die Zahl 9 zusammenzustellen, ist $9=7+2$. Die braunen Eier stammen also von Adele und Dörte.

22. Die Zahlen von 1 bis 9 sollen so in die 9 Kästchen geschrieben werden, dass die Pfeile immer von einer kleineren zu einer grösseren Zahl zeigen. Die 5 und die 7 sind schon eingetragen. Welche Zahl gehört in das Kästchen mit dem Fragezeichen?

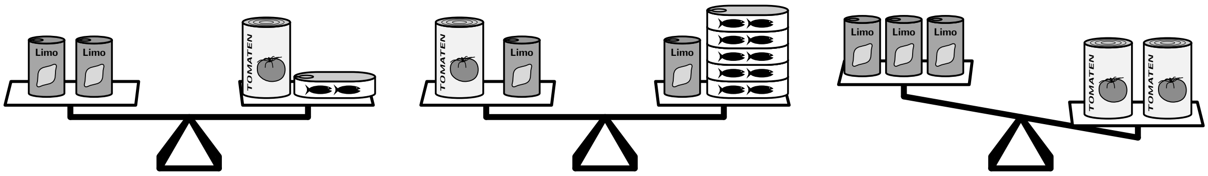


(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 8

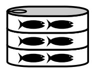
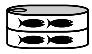
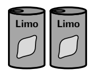
Lösung: Wir überlegen, welche Zahlen in den leeren Kästchen stehen könnten. Über der 7 muss eine Zahl stehen, die grösser als 7 ist, also 8 oder 9. Da rechts daneben eine Zahl steht, die grösser als diese ist, muss über der 7 die 8 stehen und rechts daneben die 9.
Wer die Pfeile im rechten unteren Bereich genau betrachtet, erkennt, dass alle diese 4 Zahlen kleiner als 5 sein müssen. Das sind also die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Übrig bleibt 6, die folglich in das Kästchen mit dem Fragezeichen gehört.
Es gibt zwei Möglichkeiten, die Kästchen wie gefordert auszufüllen, siehe Bild.

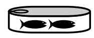


23. Mit 3 Sorten Dosen wurden 2 Waagen ins Gleichgewicht gebracht. Was muss auf die linke Seite der 3. Waage dazugelegt werden, damit auch diese im Gleichgewicht ist?



(**A**) 

(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 

(**E**) 

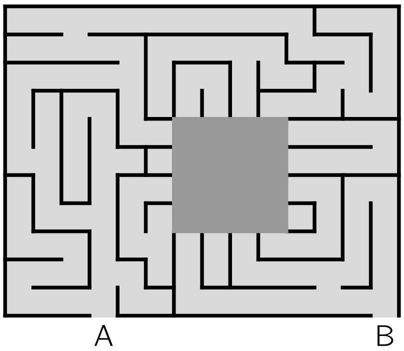
Lösung: Die 2. Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn wir auf beiden Seiten die Dose Zitronenlimo wegnehmen. Wir erkennen so, dass eine grosse Dose Tomaten genauso viel wiegt wie 5 flache Dosen mit Fisch.
Die 1. Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn wir die Dose Tomaten durch 5 Dosen mit Fisch ersetzen. Wir erkennen nun, dass 2 Dosen Zitronenlimo genauso viel wiegen wie 6 Dosen mit Fisch. Also wiegt eine Dose Zitronenlimo genauso viel wie 3 Dosen mit Fisch.
Auf der linken Seite der 3. Waage wiegen die 3 Dosen Zitronenlimo genauso viel wie $3 \cdot 3 = 9$ Dosen mit Fisch. Die 2 Dosen Tomaten auf der rechten Seite der 3. Waage wiegen genauso viel wie $2 \cdot 5 = 10$ Dosen mit Fisch. Also müssen wir auf die linke Seite der 3. Waage noch eine flache Dose mit Fisch dazulegen, damit auch diese Waage im Gleichgewicht ist.

24. Herr Duft verkauft auf dem Markt handgemachte Seife, jedes Stück zum selben Preis. Vor dem Losgehen hatte er etwas Wechselgeld in die Kasse getan. Als er 6 Stück Seife verkauft hat, sind 56 Franken in der Kasse. Als er insgesamt 18 Stück verkauft hat, sind es 104 Franken. Wie viel Wechselgeld hatte Herr Duft am Anfang in der Kasse?

(**A**) 26 Franken (**B**) 29 Franken (**C**) 32 Franken (**D**) 35 Franken (**E**) 38 Franken

Lösung: Wir schauen uns an, wie sich der Betrag in der Kasse verändert hat, nachdem Herr Duft $18 - 6 = 12$ weitere Stück Seife verkauft hat. Der Geldbetrag ist von 56 Franken auf 104 Franken angewachsen, also um 104 Franken $-$ 56 Franken $=$ 48 Franken. Somit kostet ein Stück Seife 48 Franken : $12 = 4$ Franken. Mit den ersten 6 Stück Seife hat Herr Duft also $6 \cdot 4$ Franken $=$ 24 Franken eingenommen. Dann waren zu Beginn 56 Franken$-$24 Franken $=$ 32 Franken Wechselgeld in der Kasse.

Lauter Labyrinthe



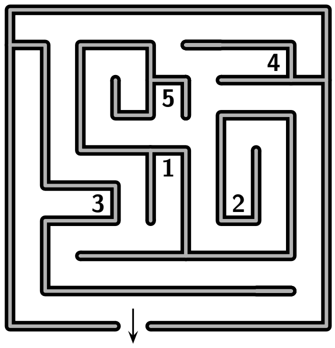
In dem links abgebildeten Labyrinth fehlt ein Teil.

Welches der folgenden Teile (ohne es zu drehen) muss eingesetzt werden, damit es einen Weg von A nach B gibt?

Emily hat mal gehört, wie man sicher aus einem Labyrinth herausfindet: Man läuft so, dass die rechte Hand ständig Kontakt mit der Wand hat. Doch leider klappt das nicht immer.

Von welchen der fünf Startpunkte aus wird Emily auf diese Weise aus dem rechts abgebildeten Labyrinth herausfinden?

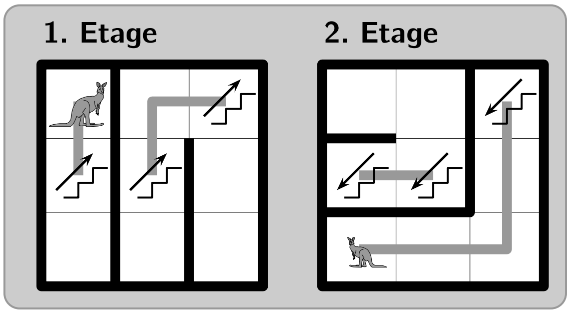
Was haben die Punkte, von denen Emily den Ausgang auf diese Weise nicht findet, gemeinsam?

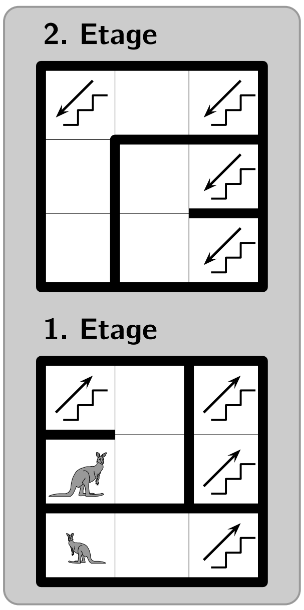


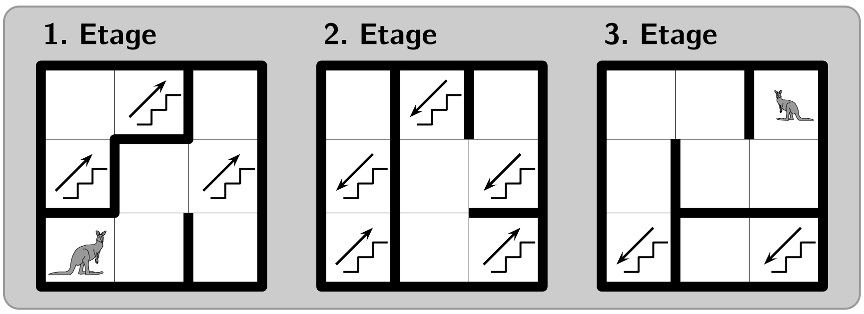
Wie kommt die Känguru-Mutter zu ihrem Jungen?

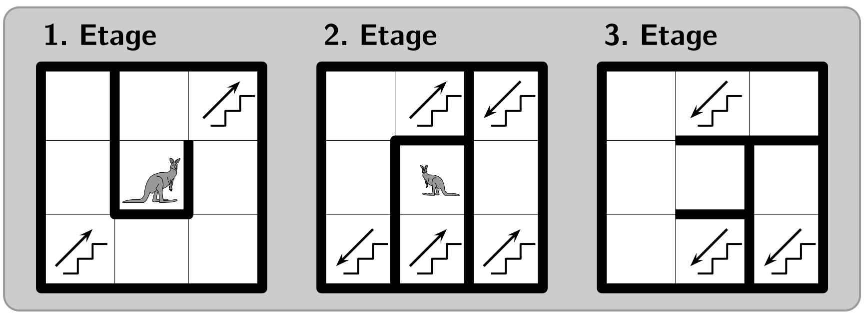
Finde in den 3D-Labyrinthen den richtigen Weg. Mit Hilfe der Treppen kann die Känguru-Mutter zwischen den Etagen hin- und herspringen.

Rechts ist ein Beispiel angegeben.







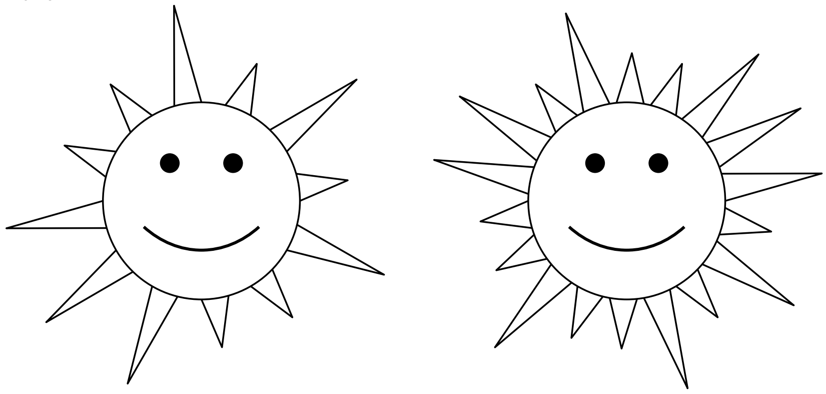


Bunte Sonnenstrahlen

Die Sonnenstrahlen sollen jeweils so mit den Farben rot, orange und gelb ausgemalt werden, dass die folgenden Regeln erfüllt sind:

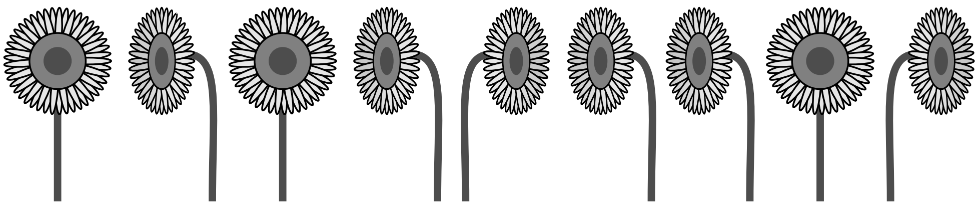
1. Jeder kurze Strahl, der sich direkt zwischen zwei langen Strahlen befindet, ist gelb.
2. Wenn man die Strahlen rundherum abzählt, ist jeder 3. Strahl rot.
3. Von den kurzen Strahlen gibt es gleich viele gelbe, orange und rote Strahlen.
4. Direkt benachbarte Strahlen haben unterschiedliche Farben.

Wer kann beide Sonnen richtig ausmalen?



Sonnenblumen

Gestern sahen die 9 Sonnenblumen am Feldrand so aus wie im Bild. Einige neigten sich nach links, einige nach rechts und einige nach vorn.
Wie viele der Sonnenblumen neigten sich in dieselbe Richtung wie eine zu ihr benachbarte?



Heute neigen sich die 3., die 6. und die 9. Sonnenblume (von links) in eine andere Richtung als gestern. Insgesamt neigen sich nun 3 nach links, 3 nach vorn und 3 nach rechts. Wie sieht die Reihe heute aus? Wie viele der Sonnenblumen neigen sich heute in dieselbe Richtung wie eine zu ihr benachbarte?

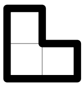
Sonnenfinsternis – total logisch!

Nesreen, Alina und Thiago haben schon einmal eine totale Sonnenfinsternis gesehen. Thiago wohnt in Argentinien und hat sie dort gesehen. Die Sonnenfinsternis im Jahr 2006 war länger zu sehen als die im Jahr 1997. In Libyen war sie länger als 4 Minuten sichtbar. Nesreen hat sie im März beobachtet. Die Sonnenfinsternis im Jahr 2020 war 2 Minuten und 10 Sekunden lang zu sehen. Die Sonnenfinsternis, die Alina gesehen hat, hat 2 Minuten und 50 Sekunden angedauert.

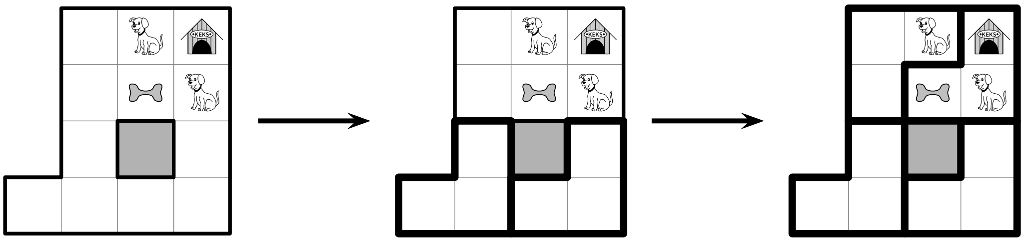
Verbinde jeweils die 4 Informationen, die zusammengehören.

Nesreen	Argentinien	09.03.1997	2 min 10 s
Alina	Libyen	29.03.2006	2 min 50 s
Thiago	Sibirien	14.12.2020	4 min 07 s

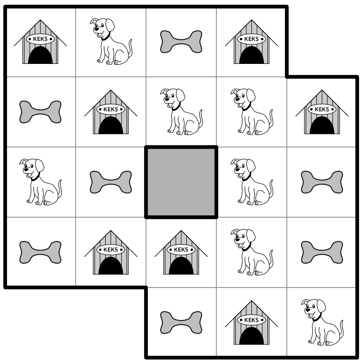
Hundelogik

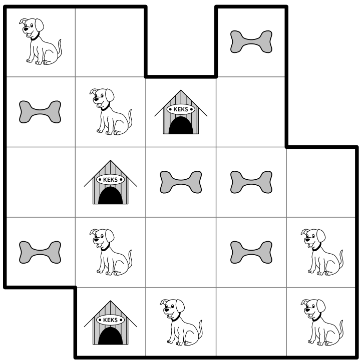
Die weissen Felder im Diagramm sind in -förmige Gebiete aufzuteilen. Jedes weisse Feld muss zu einem Gebiet gehören, und die Gebiete dürfen sich nicht überschneiden. In jedem Gebiet darf sich immer nur höchstens ein Hund, höchstens eine Hundehütte und höchstens ein Leckerli befinden.

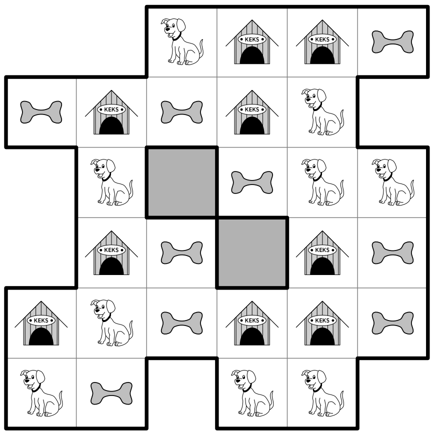
Wie im folgenden Beispiel kann es Gebiete geben, die weniger als drei Bilder enthalten.

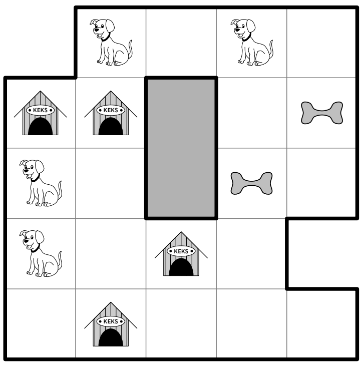


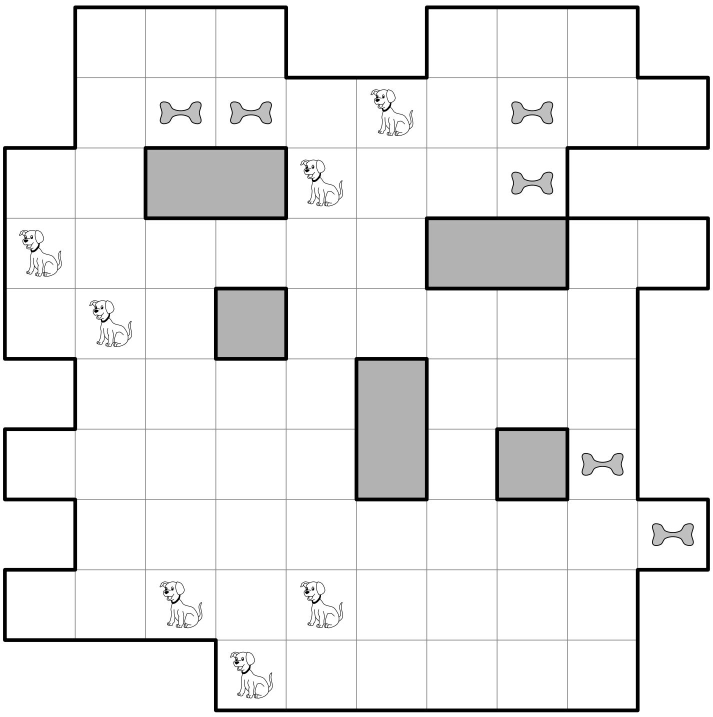
Wer findet die Gebiete in den folgenden Rätseln?

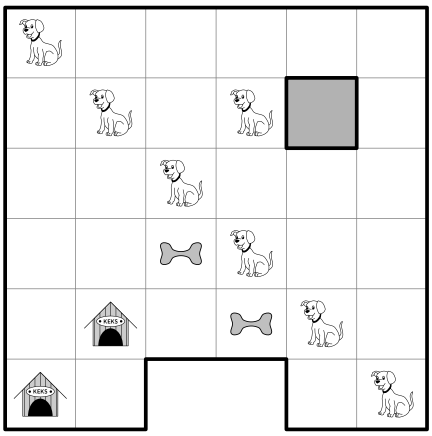






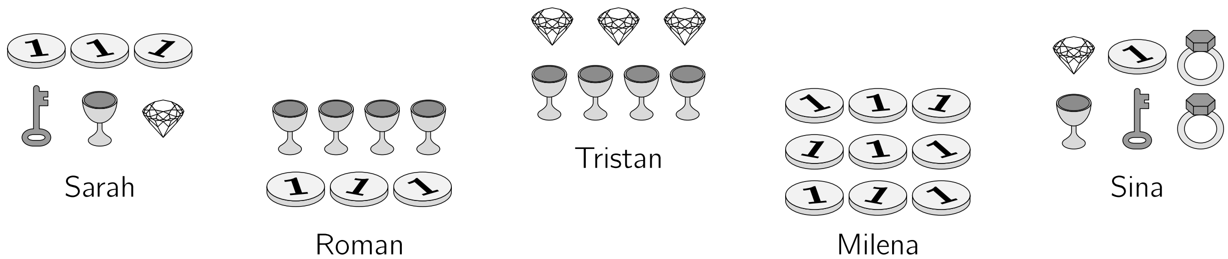






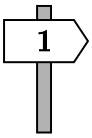
Schatzsuche

Sina spielt mit vier Freunden ein Brettspiel, bei dem Schätze zu sammeln sind. Eine halbe Stunde, nachdem sie angefangen haben, kommt plötzlich Sinas kleiner Bruder Samuel ins Zimmer gesaust. „Ich will auch mitspielen!“, ruft er. Die Freunde sind einverstanden.
„Nimm dir von jedem von uns einen Schatz“, schlägt Sina vor, „dann musst du nicht bei Null anfangen.“



Samuel überlegt, ob es klappt, dass er einen Schatz von jeder Sorte bekommt. Kann das gelingen? Was muss sich Samuel dafür von jedem der Freunde nehmen?

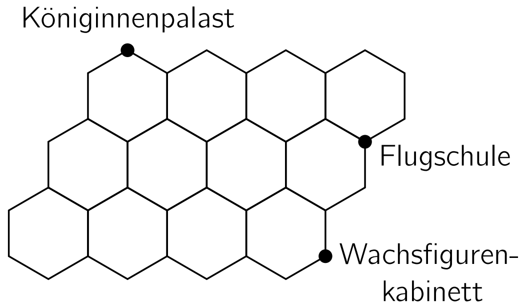
Wege finden

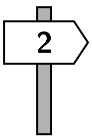


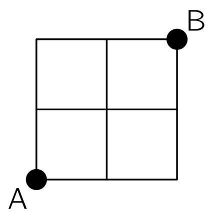
Im Dorf Waben bilden die Wege ein Netz regelmässiger Sechsecke mit Seitenlänge 20 m.

Wie lang ist die kürzeste Route entlang der Wege vom Königinnenpalast zur Flugschule? Wie viele verschiedene Routen mit dieser Länge gibt es?

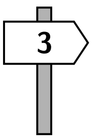
Wie lang ist die kürzeste Route vom Königinnenpalast zum Wachsfigurenkabinett? Wie viele verschiedene Routen mit dieser Länge gibt es?





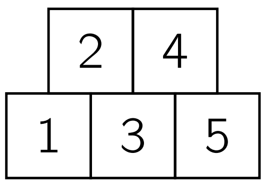


Entlang der Quadratseiten sollen Wege von A nach B gefunden werden. Wie viele Wege von A nach B gibt es, die an keinem Punkt mehrfach vorbeikommen?



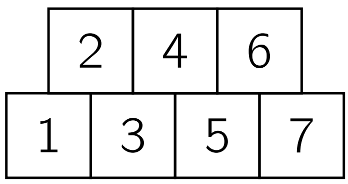
Lena hat im Hof mit Kreide so wie rechts abgebildet einige Quadrate auf den Boden gemalt. Sie hüpft von Feld zu Feld. Sie beginnt bei 1 und hüpft jedes Mal in ein benachbartes Feld mit einer grösseren Zahl. Lena hat verschiedene Möglichkeiten, wie sie auf diese Weise von der 1 zur 5 gelangen kann.

Wie viele verschiedene Wege gibt es für Lena, so von der 1 zur 5 zu hüpfen?



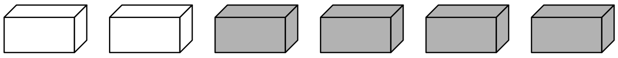
Da es tatsächlich gar nicht so viele Möglichkeiten gibt, hat Lena noch zwei Quadrate mit den Zahlen 6 und 7 dazugemalt.

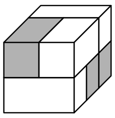
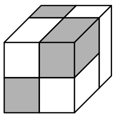
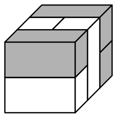
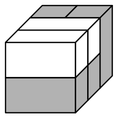
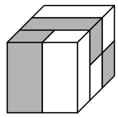
Wie viele verschiedene Wege gibt es nun für Lena, wie oben beschrieben von der 1 zur 7 zu hüpfen?



Klassenstufen 5 und 6

1. Welcher der folgenden 5 Quader kann aus den 6 Bausteinen gebaut werden?

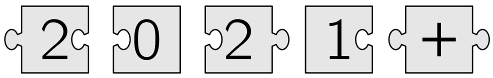


(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Der Quader bei (**D**) besteht aus 2 weissen und 4 grauen Bausteinen, ist also der gesuchte. Die 4 anderen Quader bestehen hingegen aus 3 weissen und 3 grauen Bausteinen.

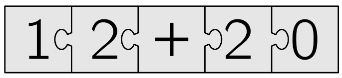
— Dasselbe Problem mit nur 4 Bausteinen wurde in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 1 gestellt. —

2. Richtig zusammengelegt, ergeben die 5 Puzzleteile eine Rechenaufgabe. Welches Ergebnis hat diese?



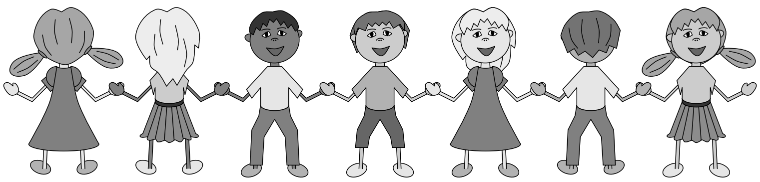
(**A**) 22 (**B**) 32 (**C**) 41 (**D**) 122 (**E**) 203

Lösung: Es gibt nur eine Möglichkeit, die 5 Teile passgenau zusammenzufügen. Das Ergebnis der Rechenaufgabe ist $12 + 20 = 32$.



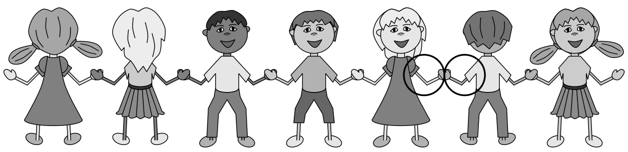
— Auch in den Klassenstufen 3/4 und 7/8 gab es Puzzleprobleme zu lösen, und zwar in Aufgabe 2 bzw. 6. —

3. Wie viele der 7 Kinder halten mit ihrer linken Hand die linke Hand eines anderen Kindes?



(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 6 (**E**) 7

Lösung: Jedes Kind, das uns den Rücken zuwendet, hat die linke Hand links und die rechte Hand rechts. Bei denjenigen, die uns ihr Gesicht zuwenden, ist es umgekehrt. Nur die beiden eingekringelten Hände sind linke Hände, die eine linke Hand halten. (**A**) ist richtig.



4. Juliane zerschneidet den abgebildeten Papierstreifen so in 3 Teile, dass die Zahl 51927 in 3 Zahlen zerlegt wird. Dann addiert sie diese 3 Zahlen. Welches ist die kleinstmögliche Summe, die Juliane dabei erhalten kann?

5 1 9 2 7

(**A**) 51 (**B**) 103 (**C**) 22 (**D**) 148 (**E**) 67

Lösung: Die 5-stellige Zahl 51927 könnte Juliane in eine 3-stellige und zwei 1-stellige Zahlen zerschneiden oder in zwei 2-stellige und eine 1-stellige. Die kleinste 3-stellige Zahl wäre dabei 192 und die zugehörige Summe $5+192+7 = 204$. Schneidet Juliane hingegen so, dass die beiden kleinstmöglichen 2-stelligen Zahlen 19 und 27 entstehen, entsteht die kleinstmögliche Summe $5 + 19 + 27 = 51$.

5. Tante Carin will ihre Küche grün streichen. Die gekaufte Farbe ist ihr zu dunkel. Sie will weisse Farbe dazumischen. Welche der folgenden Mischungen ergibt das hellste Grün?

(**A**) 1 Teil Grün und 3 Teile Weiss (**B**) 2 Teile Grün und 4 Teile Weiss
(**C**) 3 Teile Grün und 2 Teile Weiss (**D**) 4 Teile Grün und 6 Teile Weiss
(**E**) 5 Teile Grün und 8 Teile Weiss

Lösung: Denselben Farbton, den Tante Carin mit 1 Teil Grün und 3 Teilen Weiss erreicht, würde sie auch erreichen, wenn sie zur doppelten Menge Grün, also zu 2 Teilen Grün, die doppelte Menge Weiss mischen würde, also 6 Teile Weiss. Analog würden Mischungen mit 3 Teilen Grün und 9 Teilen Weiss, 4 Teilen Grün und 12 Teilen Weiss sowie 5 Teilen Grün und 15 Teilen Weiss denselben Farbton ergeben. Wir sehen, dass bei (**B**), (**C**), (**D**) und (**E**) den Grünteilen jeweils weniger Teile Weiss zugedacht sind, die Mischfarbe also dunkler als bei (**A**) ist. Bei (**A**) wird es also das hellste Grün geben.

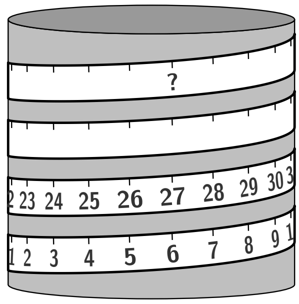
6. Vera und ihr kleiner Bruder Pavel haben insgesamt 20 Blumennamen aufgeschrieben. Vera hat 3-mal so viele wie Pavel aufgeschrieben. Wie viele Blumennamen hat Pavel aufgeschrieben?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 8

Lösung: Die Gesamtzahl der aufgeschriebenen Blumen ist die Summe aus der Anzahl der Blumen, die Pavel aufgeschrieben hat, und der Anzahl, die Vera aufgeschrieben hat. Da Vera die dreifache Anzahl im Vergleich zu Pavel hat, ist diese Summe also das Vierfache von Pavels Anzahl. Folglich erhalten wir Pavels Anzahl, wenn wir 20 durch 4 teilen: $20 : 4 = 5$.
Veras Anzahl ist dann $3 \cdot 5 = 15$ und die Summe ist – wie vorgegeben – 20.
— *Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 5 gestellt.* —

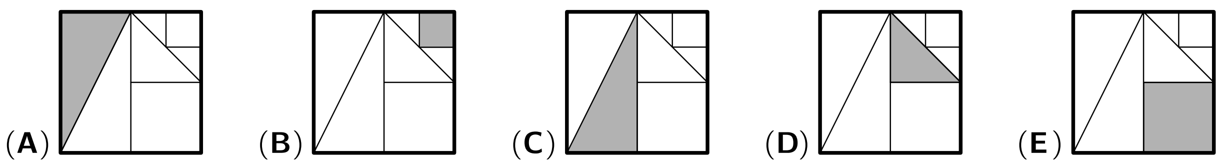
7. Raya hat ein Massband gleichmässig um eine runde Dose gewickelt. Welche Zahl sollte dann an der Stelle des Fragezeichens stehen?

(**A**) 53 (**B**) 60 (**C**) 69 (**D**) 77 (**E**) 81



Lösung: Da das Massband ganz gleichmässig um die Dose gewickelt ist, ist der Unterschied zwischen zwei direkt übereinander stehenden Zahlen immer der gleiche, das heisst: Die Differenz zwischen der direkt über 27 stehenden Zahl und 27 ist gleich der Differenz zwischen 27 und 6. Da $27 - 6 = 21$ ist, steht über der 27 die $27 + 21 = 48$. Die nach der nächsten Umrundung über der 48 stehende Zahl ist wiederum um 21 grösser, also $48 + 21 = 69$.
— *Ein ähnliches Problem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 7 zu lösen.* —

8. In einer der folgenden Figuren ist ein Achtel der Fläche des grossen Quadrats grau gefärbt. In welcher?

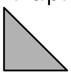


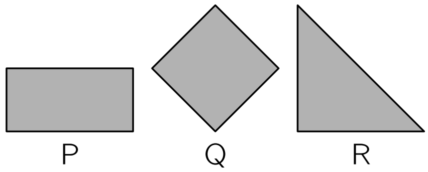
Lösung: Die senkrechte Strecke halbiert das Quadrat. Die grauen Flächen in den Zeichnungen (**A**), (**C**) und (**E**) sind jeweils halb so gross wie das halbe Quadrat, ihre Fläche ist folglich ein Viertel der Fläche des Quadrats. In der Zeichnung (**D**) ist ein solches Viertelquadrat noch einmal durch die Diagonale halbiert. Die graue Fläche in (**D**) macht ein Achtel der Fläche des grossen Quadrats aus. Die graue Fläche in (**B**) ist kleiner als ein Achtel. Also ist (**D**) die Lösung.

9. Claude hängt an eine der Zahlen 3, 4, 5, 6 und 7 hinten eine 0 an. Dann addiert er die 5 Zahlen und erhält als Summe 70. An welche Zahl hat Claude eine 0 angehängt?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

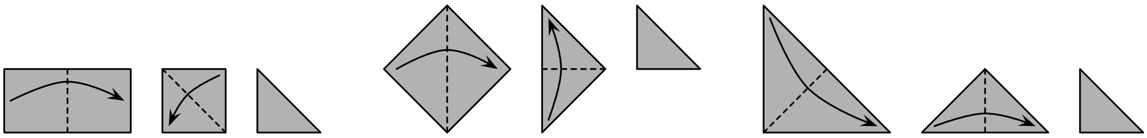
Lösung: Schauen wir uns die Lösungsvorschläge an, so stellen wir durch grobes Schätzen fest, dass weder 3 noch 4 die Lösung sein kann, denn die Summe der restlichen Zahlen ist kleiner als $70 - 30 = 40$ bzw. $70 - 40 = 30$. Und 6 und 7 kommen als Lösung nicht in Frage, weil die Summe der restlichen Zahlen zu gross ist. Mit 5 klappt es: $3 + 4 + 50 + 6 + 7 = 70$.
Diese Aufgabe lässt sich auch auf andere Arten lösen, zum Beispiel so: Addieren wir die 5 ursprünglichen Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, so erhalten wir als Summe 25. Durch Claudes „Trickserei“ ist die Summe um $70-25 = 45$ grösser geworden. Wie ist das geschehen? Wenn Claude eine 0 an eine Zahl anhängt, geht statt der Zahl selbst ihr Zehnfaches in die Summe ein. Folglich kommt durch das Anhängen der 0 das Neunfache der gewählten Zahl hinzu. Also ist die gesuchte Zahl $45 : 9 = 5$.

10. Amon faltet ein Stück Papier exakt zur Hälfte. Das tut er ein zweites Mal und erhält  . Wie könnte Amons ursprüngliches Stück Papier ausgesehen haben?

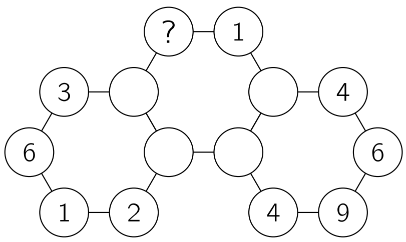


(**A**) nur wie P (**B**) nur wie Q
(**C**) nur wie R (**D**) nur wie P oder Q
(**E**) wie P, Q oder R

Lösung: Die Bilder zeigen, dass aus jedem der 3 Papierstücke das kleine Dreieck gefaltet werden kann. Folglich ist (**E**) die Lösung.



11. Bei jedem der 3 Sechsecke ist die Summe der 6 Zahlen an den Ecken gleich 30. Welche Zahl muss in dem Kreis mit dem Fragezeichen stehen?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

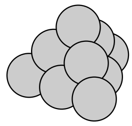
Lösung: Da die Summe der Zahlen an den Ecken eines jeden Sechsecks 30 ist, ist die Summe der beiden Zahlen, die in die leeren Kreise des linken Sechsecks gehören, $30 - 3 - 6 - 1 - 2 = 18$. Die Summe der beiden Zahlen, die in die beiden leeren Kreise des rechten Sechsecks gehören, ist $30 - 4 - 6 - 9 - 4 = 7$. Folglich ist die gesuchte Zahl im mittleren Sechseck $30 - 1 - 7 - 18 = 4$. Wir konnten diese Zahl also bestimmen, ohne die einzelnen fehlenden Zahlen angeben zu müssen. Die entsprechenden Summen haben ausgereicht.
Wir gelangen ebenso zur Lösung, wenn wir in die beiden leeren Felder des linken Sechsecks 2 beliebige Zahlen mit der Summe 18 und in die beiden leeren Felder des rechten Sechsecks 2 beliebige Zahlen mit der Summe 7 schreiben.

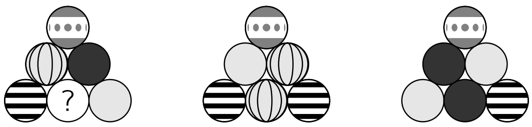
12. „Schön, dass ihr unsere Miss Mimi gefüttert habt“, freut sich die Mutter. „Wann war das?“ „Zwischen 14:00 Uhr und 14:30 Uhr“, antwortet Merle. „Das stimmt nicht“, sagt Frieder. „Es war nicht zwischen 14:00 Uhr und 14:40 Uhr.“ Beide Antworten stimmen nicht. Zu einer der folgenden fünf Uhrzeiten wurde das Kätzchen gefüttert. Zu welcher?

(**A**) 14:05 Uhr (**B**) 14:15 Uhr (**C**) 14:20 Uhr (**D**) 14:35 Uhr (**E**) 14:45 Uhr

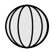
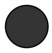
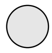
Lösung: Da die Aussage von Merle falsch ist, muss die Katze Miss Mimi entweder vor 14:00 Uhr oder nach 14:30 Uhr gefüttert worden sein. Da die Aussage von Frieder falsch ist, muss es zwischen 14:00 Uhr und 14:40 Uhr gewesen sein. Dann kann es nur um 14:35 Uhr gewesen sein, denn das ist von den Zeitangaben in den Lösungsvorschlägen die einzige nach 14:30 Uhr und vor 14:40 Uhr.

13. Die abgebildete 3-seitige Pyramide besteht aus 10 verzierten Kugeln. Jedes Muster gibt es 2-mal. Die folgenden 3 Abbildungen zeigen die Pyramide von 3 Seiten.





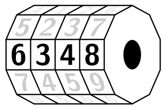
Wie sieht die Kugel mit dem Fragezeichen aus?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Die Kugel an der Spitze der Pyramide ist von allen 3 Seiten zu sehen. Die zweite Kugel dieser Sorte ist in keiner der Abbildungen zu sehen. Also muss die zweite Kugel dieser Sorte die mit dem Fragezeichen sein.

— *Ein ähnliches, etwas schwierigeres Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 21 gestellt.* —

14. Bei Katis Fahrradschloss kann jede der 4 Stellen einzeln mit den Ziffern 0 bis 9 eingestellt werden. Kati hatte die richtige Kombination eingestellt und anschliessend jede Ziffer in dieselbe Richtung und um gleich viele Ziffern gedreht. Nun ist 6348 zu sehen. Welche Ziffernfolge entspricht <u>sicher nicht</u> der ursprünglichen richtigen Kombination?

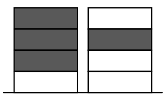
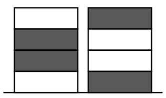
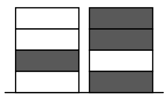
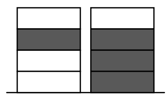


(**A**) 3015 (**B**) 1893 (**C**) 8560 (**D**) 4906 (**E**) 0782

Lösung: Wenn wir in der Einstellung 3015 jeweils 3 Ziffern vorwärts (oder 7 Ziffern rückwärts) drehen, erhalten wir die abgebildete Einstellung 6348. (**A**) könnte also Katis richtige Kombination sein. Das trifft ebenso für (**B**) (5 Ziffern vorwärts oder rückwärts), (**C**) (8 vorwärts oder 2 rückwärts) und (**E**) (6 vorwärts oder 4 rückwärts) zu. Aus (**D**) kann die richtige Kombination nicht durch gleichmässiges Drehen erreicht werden. Wenn jeweils um 2 Ziffern vorwärts gedreht wird, stimmen zwar die erste und die letzte Ziffer mit der abgebildeten Einstellung 6348 überein, die beiden mittleren jedoch nicht.

— *Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 7/8 in Aufgabe 8 gestellt.* —

15. Ronja und Wanja spielen. Ronja hat 4 weisse Spielsteine, Wanja hat 4 schwarze. Sie wollen damit zwei Türme aus jeweils 4 Spielsteinen bauen. Dazu legen sie abwechselnd ihre Spielsteine. Ronja beginnt. Welches Paar von Türmen können die beiden <u>nicht</u> bauen?

(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

Lösung: Da Wanja in dem Spiel den letzten Spielstein legt, muss einer der beiden oben liegenden Spielsteine schwarz sein. (**E**) ist also nicht möglich. Für jedes der 4 anderen Turmpaare lässt sich eine Abfolge angeben, in der Ronja und Wanja ihre Spielsteine abgelegt haben könnten:

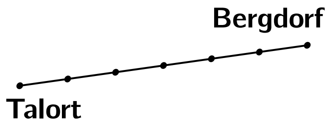
W4	R4	W3	W4	R4	W4	R4	W4
W2	W3	W2	R4	W3	R3	R3	W3
W1	R3	R2	R3	W2	R2	W2	R2
R1	R2	R1	W1	R1	W1	R1	W1

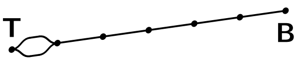
16. Aus einer Schachtel mit 20 roten und 20 blauen Spielfiguren hat Nele die Hälfte der Figuren und Moritz die andere Hälfte genommen. Welche der folgenden Aussagen ist <u>sicher</u> richtig?

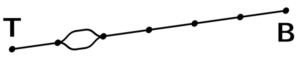
(**A**) Nele hat mindestens eine rote Figur.
(**B**) Nele hat gleich viele rote und blaue Figuren.
(**C**) Nele hat genauso viele rote Figuren wie Moritz.
(**D**) Nele hat genauso viele blaue Figuren wie Moritz rote Figuren hat.
(**E**) Nele hat genauso viele blaue Figuren wie Moritz.

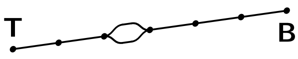
Lösung: Zuerst stellen wir fest, dass Nele und Moritz beide 20 Figuren genommen haben. Betrachten wir nun (**A**), stellen wir schnell fest, dass dies nicht gelten muss, denn Nele könnte auch alle 20 blauen Figuren und keine rote haben. Mit dieser Aufteilung sehen wir, dass auch (**B**), (**C**) und (**E**) nicht unbedingt gelten müssen. Nur (**D**) kommt damit als Lösung in Frage.
Dass das auch wirklich <u>sicher</u> richtig ist, sehen wir gut, wenn wir die Anzahl der roten Figuren von Nele betrachten. Diese ergibt zusammen mit der Anzahl ihrer blauen Figuren 20 (Gesamtzahl von Neles Figuren) und mit der Anzahl der roten Figuren von Moritz ebenfalls 20 (Gesamtzahl roter Figuren). Also hat Nele sicher genauso viele blaue Figuren wie Moritz rote Figuren hat.
— Aufgabe 22 in Klassenstufe 7/8 ist ähnlich, aber etwas komplizierter. —

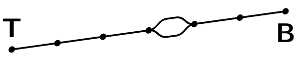
17. Zwischen Talort und Bergdorf besteht eine eingleisige Zugstrecke. Zu jeder vollen Stunde startet von Talort ein Zug zu einer 40-Minuten-Fahrt nach Bergdorf und gleichzeitig ein Zug von Bergdorf zu einer 30-Minuten-Fahrt nach Talort. Beide Züge fahren mit konstanter Geschwindigkeit. Eine Ausweichstelle mit zwei Gleisen sorgt für den reibungslosen Verkehr. Wo befindet sich die Ausweichstelle?

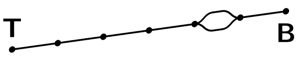


(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

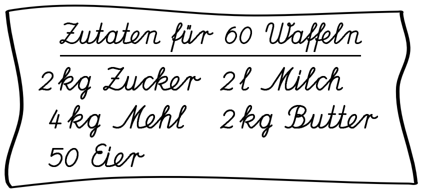
Lösung: Von Knotenpunkt zu Knotenpunkt brauchen die Züge jeweils ein Sechstel ihrer Fahrzeit, der Zug, der in Talort startet, also 6 min 40 s, und der Zug, der in Bergdorf startet, 5 min.
Da der Zug, der in Bergdorf startet, schneller ist als der Zug, der in Talort startet, liegt die Ausweichstelle in der unteren Hälfte der Strecke. Wenn der Zug aus Bergdorf nach 15 Minuten genau die Hälfte der Strecke erreicht, befindet sich der Zug aus Talort schon im dritten Sechstel der Strecke, denn die ersten beiden Sechstel hat er schon nach $2 \cdot (6\,\text{min}\ 40\,\text{s}) = 13\,\text{min}\ 20\,\text{s}$ hinter sich gelassen. Also muss sich die Ausweichstelle im dritten Sechstel der Strecke befinden, so wie es bei (**C**) zu sehen ist.

18. Die Osterhasen Zita, Ysette, Xaver, Willi und Vroni hocken im Kreis und besprechen, wie viele Eier jeder verstecken soll. Willi hockt neben Vroni, Zita hockt nicht neben Ysette. Ysette hat aufgepasst, dass sie nicht neben Willi hockt. Welche beiden Osterhasen hocken neben Xaver?

(**A**) Zita und Ysette
(**B**) Ysette und Vroni
(**C**) Vroni und Willi
(**D**) Willi und Zita
(**E**) Zita und Vroni

Lösung: Da Ysette weder neben Zita noch neben Willy hockt, hocken neben Ysette auf einer Seite Xaver, auf der anderen Seite Vroni – und Zita und Willy hocken demzufolge nebeneinander. Da Vroni neben Willy hockt, hockt Vroni also zwischen Willy und Ysette. Und auf der anderen Seite von Ysette sitzt Xaver, neben Zita. Es gibt für die kleine Osterhasenrunde 2 verschiedene Möglichkeiten – die eine ist das Spiegelbild der anderen. In beiden Fällen hockt Xaver zwischen Zita und Ysette.
— Ein etwas leichteres Anordnungsproblem war in Klassenstufe 3/4 in Aufgabe 14 zu lösen. —

19. Barans Mutter arbeitet im Hotel. Der Koch hat ihr sein tolles Waffel-Rezept aufgeschrieben. Als sie am Sonntag Waffeln machen will, hat sie 400 g Zucker, 2 Liter Milch, knapp 1 kg Mehl, 200 g Butter und 7 Eier zur Verfügung. Wie viele Waffeln kann sie damit höchstens backen?



(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

Lösung: Wir schauen uns die verfügbaren Zutaten an und vergleichen mit dem Rezept. Wir sehen zuerst, dass die 2 Liter Milch für genau 60 Waffeln reichen würden. Die Mutter hat knapp 1 kg Mehl, das ist knapp ein Viertel der Menge, die für 60 Waffeln erforderlich sind. Das Mehl würde also für knapp ein Viertel der 60 Waffeln reichen, das heisst für etwas weniger als 15 Waffeln. Als nächstes stellen wir fest, dass in dem Rezept die gleiche Menge Zucker wie Butter gebraucht wird. Da die Mutter aber doppelt so viel Zucker wie Butter hat, reicht der Zucker sicher für die Waffeln, die sich mit den vorhandenen 200 g Butter backen lassen. Die 200 g sind ein Zehntel der Menge, die im Rezept steht, also können damit nicht mehr als ein Zehntel von 60 Waffeln gebacken werden, das heisst 6 Waffeln. Die 7 Eier reichen für 6 Waffeln, denn dafür braucht die Mutter ja nur ein Zehntel der 50 Eier aus dem Rezept, also nur 5 Eier. Die Mutter kann höchstens 6 Waffeln backen.

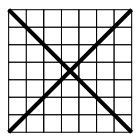
20. Einst sassen Elfen und Trolle beieinander, jedes der 10 Wesen hatte eine Kugel in der Hand. Jede der Zahlen von 1 bis 10 stand auf genau einer Kugel. Nach der Zahl auf seiner Kugel befragt, nannte jeder Elf richtig seine Zahl. Jeder Troll nannte irgendeine der Zahlen von 1 bis 10. Die Summe aller 10 genannten Zahlen war 34. Welches war die kleinste mögliche Anzahl von Trollen in der Gruppe?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

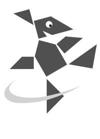
Lösung: Damit wir von den Trollen die kleinste mögliche Anzahl finden, müssten es von den Elfen möglichst viele sein. Die Summe der Zahlen auf den Kugeln der Elfen muss dafür möglichst klein sein. Nun ist $1+2+3+4+5+6+7=28$ und $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Die Elfen können also höchstens zu siebent dabei sein. Mit 7 Elfen und 3 Trollen, die ja irgendwelche Zahlen genannt haben, ist die beschriebene Situation möglich. Zum Beispiel könnte die Summe der Zahlen auf den Kugeln der Elfen 28 sein, und die Trolle könnten 2 und 1 und 3 gesagt haben, womit sich tatsächlich als Summe aller genannten Zahlen 34 ergibt.

21. Bei einem Würfel mit der Kantenlänge 7 cm wurden auf jeder der 6 Seitenflächen die beiden Diagonalen rot gestrichen. Danach wurde der Würfel in Würfelchen der Kantenlänge 1 cm zersägt. Wie viele der kleinen Würfelchen haben mindestens eine rot gestrichene Diagonale?

(**A**) 54 (**B**) 62 (**C**) 66 (**D**) 70 (**E**) 78



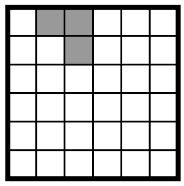
Lösung: Auf jeder der 6 Seitenflächen des Würfels verlaufen die beiden Diagonalen wie abgebildet durch insgesamt 13 Seitenflächen der kleinen Würfelchen. Unter diesen sind 4 Eckwürfel, bei denen insgesamt 3 Seitenflächen einen roten Strich tragen. Die restlichen $13-4=9$ kleinen Würfelchen haben den roten Strich auf nur einer Seitenfläche. Da der grosse Würfel 8 Eckwürfel und 6 Seitenflächen hat, existieren also $8+6\cdot 9=62$ kleine Würfelchen, bei denen mindestens eine Seitenfläche eine rote Diagonale trägt.



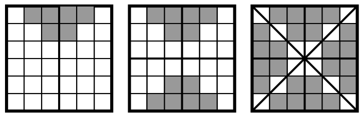
Willy schreibt die Jahreszahl 2021 als Summe von fünf natürlichen Zahlen, deren Ziffern nur Dreien und Fünfen sind.

Wie viele Dreien verwendet Willy insgesamt für die fünf Summanden?

22. Auf kariertem Papier hat Florian einen 6×6-Rahmen für ein Bild markiert und 3 Kästchen ausgemalt. Wie viele Kästchen muss Florian mindestens noch ausmalen, damit sein fertiges Bild <u>vier</u> Symmetrieachsen hat?



(**A**) 3 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 18 (**E**) 21

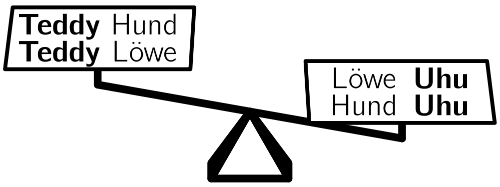


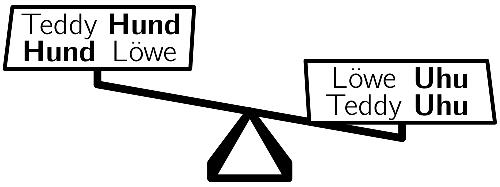
Lösung: Die 4 Symmetrieachsen des fertigen Bildes sind identisch mit den 4 Symmetrieachsen des Quadrats. Wir füllen das Bild Schritt für Schritt und fügen zuerst die an der senkrechten, dann die an der waagerechten und zum Schluss die an den beiden diagonalen Symmetrieachsen gespiegelten Kästchen ein. Insgesamt sind es 21 Kästchen, die zu den 3 grauen Kästchen der Aufgabe dazukommen.

23. Der kleine Franz spielt sehr gern mit seinen vielen Plüschtieren. Heute wiegt er sie auf der Waage seiner Mutter und entdeckt: Teddy und Hund wiegen zusammen genauso viel wie Löwe und Uhu. Teddy und Löwe wiegen zusammen weniger als Hund und Uhu. Hund und Löwe wiegen zusammen weniger als Teddy und Uhu. Welches Plüschtier ist am schwersten?

(**A**) Teddy (**B**) Hund (**C**) Löwe (**D**) Uhu (**E**) Die Tiere sind gleich schwer.

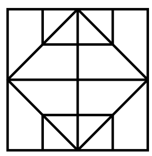
Lösung: Wir stellen uns vor, dass wir alle 4 Plüschtiere doppelt hätten, jeweils gleich schwere Zwillinge. Wir wissen, dass Teddy und Löwe zusammen weniger wiegen als Hund und Uhu. Hätten wir auf die linke Seite der Waage nun noch den zweiten Teddy und den zweiten Hund gesetzt und auf die rechte Seite der Waage den zweiten Löwen und den zweiten Uhu, so würde sich, da Teddy und Hund zusammen genauso viel wiegen wie Löwe und Uhu, das Verhalten der Waage nicht ändern.

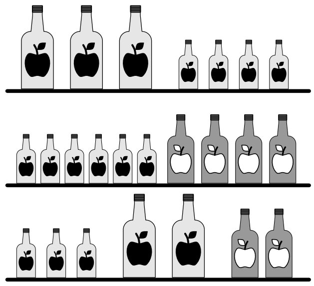




Das Verhalten der Waage ändert sich dann auch nicht, wenn wir auf <u>beiden</u> Seiten den Hund und den Löwen runternehmen. Die Waage zeigt nun an, dass 2 Teddys weniger wiegen als 2 Uhus, also ist der Teddy leichter als der Uhu. Das ist mit der linken Waage dargestellt.
Nun führen wir dasselbe Gedankenmanöver noch einmal durch: Wir wissen, dass Hund und Löwe zusammen weniger wiegen als Teddy und Uhu und stellen uns vor, wir hätten auf die linke Waagschale noch den Teddy-Zwilling und den Hunde-Zwilling und auf die rechte Waagschale den Löwen-Zwilling und den Uhu-Zwilling gesetzt. Da Teddy und Hund zusammen genauso viel wiegen, wie Löwe und Uhu, ändert sich das Verhalten der Waage nicht. Wenn wir nun auf <u>beiden</u> Seiten den Teddy und den Löwen entfernen, bleibt natürlich das Verhalten der Waage auch erhalten – und wir erkennen, dass 2 Hunde weniger wiegen als 2 Uhus, womit der Hund also leichter ist als der Uhu. Das ist mit der rechten Waage dargestellt.
Der Uhu ist also schwerer als der Teddy und schwerer als der Hund, und da Teddy und Hund zusammen genauso schwer sind wie Löwe und Uhu, muss auch der Löwe leichter sein als der Uhu. Der Uhu ist am schwersten.

Wie viele Dreiecke lassen sich rechts im Bild finden?





24. In einem Regal stehen Flaschen mit Apfelsaft in drei verschiedenen Grössen. Auf jedem Regalbrett ist dieselbe Menge Saft, nämlich 3200 ml. Wie viel Saft befindet sich in jeder mittelgrossen Flasche?

(**A**) 350 ml (**B**) 450 ml (**C**) 500 ml (**D**) 600 ml (**E**) 650 ml

Lösung: Da auf dem mittleren Brett 6 kleine und 4 mittlere Flaschen mit insgesamt 3200 ml Inhalt stehen, enthalten 3 kleine und 2 mittlere Flaschen, also die Hälfte, zusammen $3200\,\text{ml} : 2 = 1600\,\text{ml}$. Auf dem unteren Brett stehen zusammen mit 2 grossen Flaschen gerade 3 kleine und 2 mittlere Flaschen, und die haben, wie wir eben errechnet haben, zusammen 1600 ml Inhalt. Dann enthalten also die 2 grossen Flaschen zusammen $3200\,\text{ml} - 1600\,\text{ml} = 1600\,\text{ml}$ Saft, eine grosse Flasche also $1600\,\text{ml} : 2 = 800\,\text{ml}$. Auf dem oberen Brett stehen 3 grosse und 4 kleine Flaschen. Die grossen Flaschen enthalten $3 \cdot 800\,\text{ml} = 2400\,\text{ml}$ Saft. Also enthalten die kleinen Flaschen jeweils $(3200\,\text{ml} - 2400\,\text{ml}) : 4 = 800\,\text{ml} : 4 = 200\,\text{ml}$ Saft. Die Füllmenge der mittelgrossen Flaschen errechnen wir, indem wir das mittlere Brett betrachten: $(3200\,\text{ml} - 6 \cdot 200\,\text{ml}) : 4 = 2000\,\text{ml} : 4 = 500\,\text{ml}$. Jede mittelgrosse Flasche enthält 500 ml Saft.

Rechengitter

In jedes Rechengitter sind die Zahlen von 1 bis 6 bzw. von 1 bis 9 so einzutragen, dass die Zahlen in den grauen Feldern genau die Ergebnisse der dazugehörigen Rechnungen in den Zeilen bzw. Spalten sind. Die Rechenzeichen sind so wie auf dem Taschenrechner geschrieben, also $+$, $-$, $\times$ und $\div$.

Nicht vergessen: Es gilt „Punktrechnung vor Strichrechnung“.

Wer findet alle Lösungen?

	+		=	**4**
+		+		
	+		=	**6**
+		+		
	+		=	**11**
=		=		
9		**12**		1 bis 6

	+		+		=	**23**
+		+		+		
	+		+		=	**8**
+		+		+		
	+		+		=	**14**
=		=		=		
21		**14**		**10**		1 bis 9

	×		×		=	**15**
+		×		+		
	×		+		=	**50**
−		+		+		
	+		+		=	**15**
=		=		=		
5		**25**		**22**		1 bis 9

	×		=	**18**
×		+		
	−		=	**2**
+		+		
	+		=	**6**
=		=		
25		**10**		1 bis 6

	×		+		=	**73**
×		−		×		
	+		−		=	**10**
+		+		×		
	×		+		=	**14**
=		=		=		
56		**6**		**12**		1 bis 9

	−		+		=	**7**
+		×		+		
	×		+		=	**15**
+		−		+		
	×		×		=	**56**
=		=		=		
8		**4**		**22**		1 bis 9

	×		=	**20**
×		−		
	÷		=	**2**
+		+		
	−		=	**1**
=		=		
32		**2**		1 bis 6

	×		+		=	**30**
+		×		+		
	÷		×		=	**24**
−		+		−		
	+		−		=	**2**
=		=		=		
12		**27**		**5**		1 bis 9

	×		×		=	**30**
+		×		×		
	+		−		=	**5**
+		−		÷		
	+		+		=	**14**
=		=		=		
10		**21**		**6**		1 bis 9

Auf www.mathe-kaenguru.de/broschueren können die Rechengitter auch online gelöst werden.

Lust auf mehr?

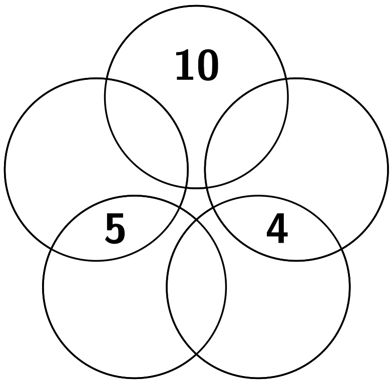
Die Idee für die Rechengitter stammt von www.janko.at/Raetsel/Rechengitter, wo es ähnliche Rechengitter und auch viele andere Rätsel zu entdecken gibt.

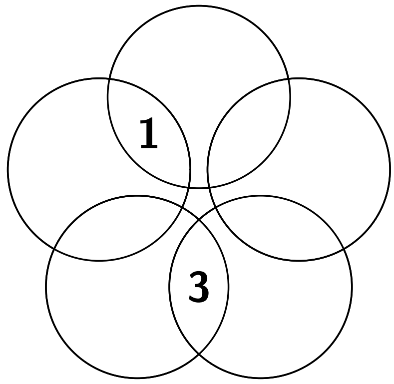
Magische Zahlenkreise I

In die zehn Felder, die durch die fünf Kreise gebildet werden, sollen die Zahlen von 1 bis 10 eingetragen werden. Dabei soll die Summe der drei Zahlen, die im selben Kreis stehen, für jeden Kreis dieselbe sein. Einige Zahlen sind schon eingetragen.

In der ersten Aufgabe soll die Summe der drei Zahlen in jedem der fünf Kreise gleich 14 sein. Wie müssen die restlichen Zahlen eingetragen werden?

Bei der zweiten Aufgabe sollen die fünf ungeraden Zahlen $1, 3, 5, 7, 9$ in die kleinen Felder, die zu zwei Kreisen gehören, eingetragen werden. Die Summe der Zahlen in jedem Kreis muss selbst gefunden werden. Ganz schön knifflig. Wer findet die Lösung?

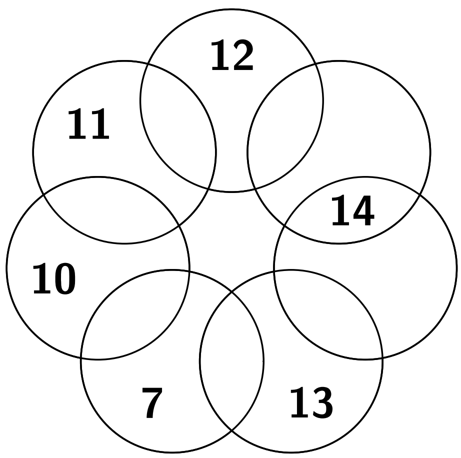




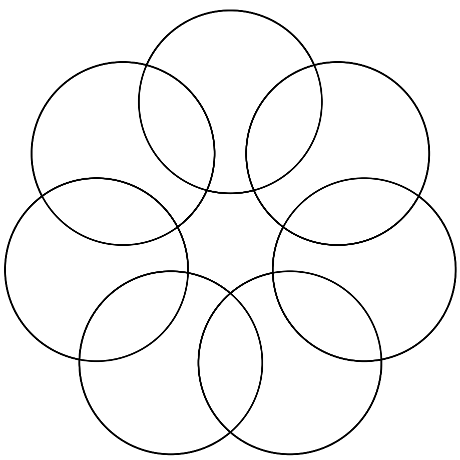
Magische Zahlenkreise II

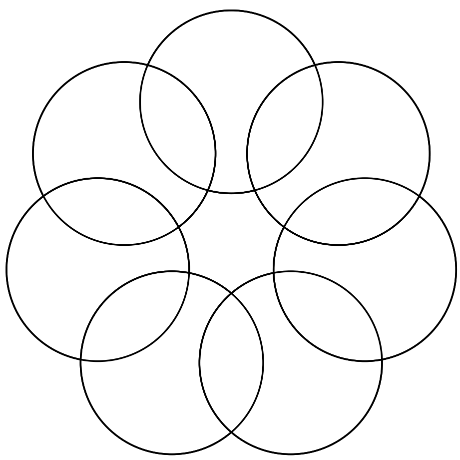
Nun sollen in die 14 Felder, die durch die 7 Kreise gebildet werden, die Zahlen von 1 bis 14 eingetragen werden.

Im Rätsel auf der rechten Seite soll die Summe der drei Zahlen in jedem der sieben Kreise gleich 21 sein. Sechs Zahlen sind schon eingetragen.
Wer kann die restlichen Zahlen eintragen?



Unten soll im linken Bild die Summe der drei Zahlen in jedem der sieben Kreise gleich 19 sein, und im rechten gleich 26.
Wer findet jeweils mehrere Möglichkeiten?

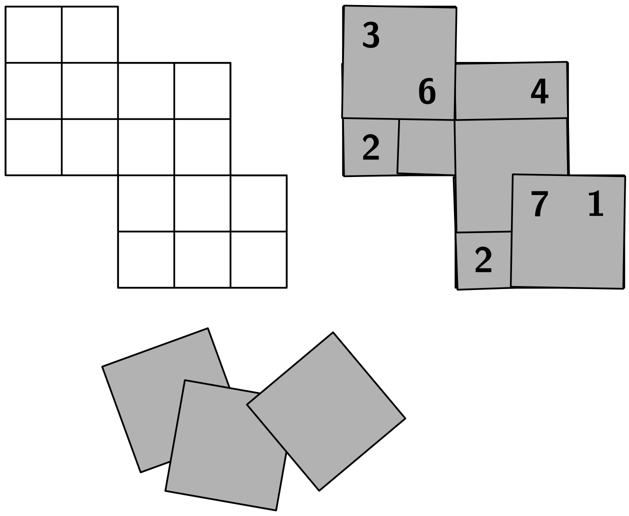




Zettelwirtschaft

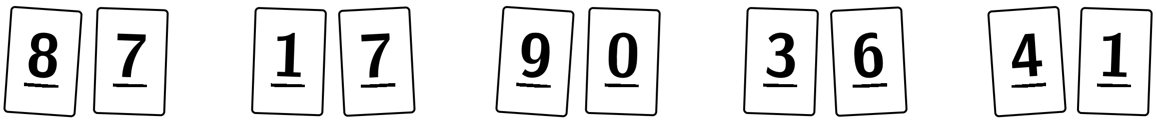
Die abgebildete Figur ist aus lauter gleich grossen Quadraten zusammengesetzt.
Die Figur wurde vollständig mit quadratischen Notizzetteln so bedeckt, dass jeder Notizzettel genau vier der Quadrate überdeckt.
Die Zahlen geben an, wie viele Notizzettel an dieser Stelle übereinanderliegen.

Wie viele Notizzettel liegen an den anderen Stellen übereinander? Wer kann alle Zahlen eintragen?



Hoch gewinnt

Taimaz hat Karten mit Zahlen zu fünf Paaren ausgelegt:



Taimaz will sich von jedem der 5 Kartenpaare jeweils eine Karte nehmen und mit diesen 5 Karten eine möglichst grosse 5-stellige Zahl legen, die zusätzlich

a) durch 5 teilbar ist.
b) durch 3 teilbar ist.
c) durch 24 teilbar ist.
d) durch 11 teilbar ist.

Welches ist jeweils die grösste solche Zahl, die Taimaz legen kann?

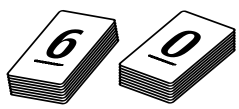
Hinweis: *Zum Lösen dieser Aufgabe sind Teilbarkeitsregeln nützlich.*

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (also die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist. Um zu überprüfen, ob z. B. die Zahl 429171 durch 3 teilbar ist, müssen wir nur prüfen, ob $4+2+9+1+7+1=24$ *durch 3 teilbar ist – und das ist der Fall, also ist 429171 durch 3 teilbar.*

Wer erinnert sich an die Teilbarkeitsregel für 4 und die für 5?

Eine Teilbarkeitsregel kennen bestimmt nicht alle. Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre sogenannte alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Um die alternierende Quersumme zu berechnen, addieren und subtrahieren wir die Ziffern immer abwechselnd. Um zu überprüfen, ob z. B. die Zahl 429171 durch 11 teilbar ist, müssen wir nur prüfen, ob $4-2+9-1+7-1=16$ *durch 11 teilbar ist – das ist nicht der Fall, also ist 429171 nicht durch 11 teilbar.*

45



Nadine hat zwei Stapel mit Zahlenkarten. Auf dem linken Stapel liegen nur Karten mit einer 6 und auf dem rechten Stapel nur Karten mit einer 0.

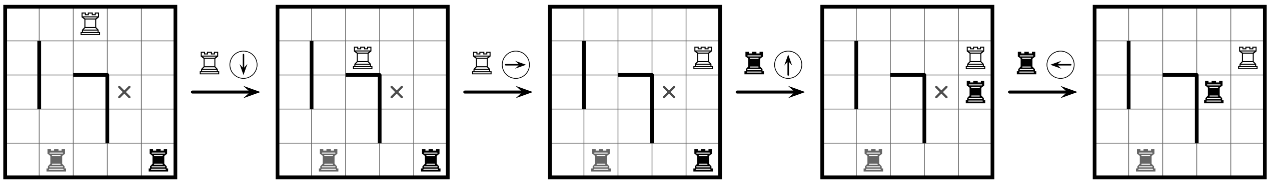
Welches ist die kleinste Zahl, die sie mit diesen Karten legen kann, die ein Vielfaches von 45 ist? Dabei sollen sowohl Karten mit 6 als auch mit 0 verwendet werden.

Wer findet auch die nächstgrösseren drei Zahlen, die so gelegt werden können?

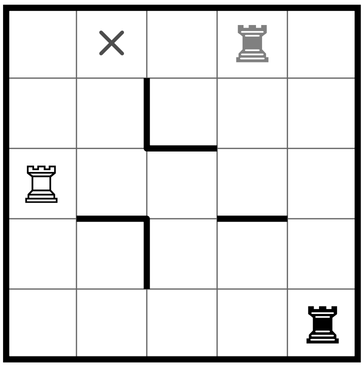
Türme auf Wanderschaft

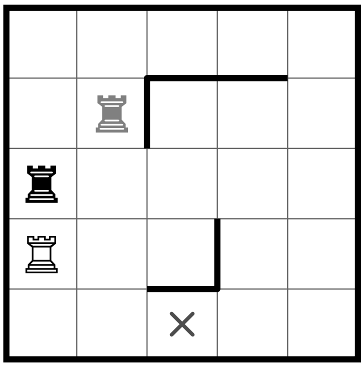
Ziel ist es bei diesem Rätsel, die Türme nacheinander so zu ziehen, dass am Ende der schwarze Turm auf dem Feld mit dem Kreuz steht. Ein Zug besteht darin, einen Turm auszuwählen und entweder nach oben, nach unten, nach links oder nach rechts zu ziehen, und zwar so weit, bis er auf ein Hindernis trifft, das heisst, bis er entweder den Rand des Spielfeldes, eine Mauer oder einen anderen Turm erreicht. Mauern und andere Türme dürfen nicht übersprungen werden. Es müssen nicht alle Türme benutzt werden. Anders als beim Schach können sich die Türme nicht gegenseitig schlagen.

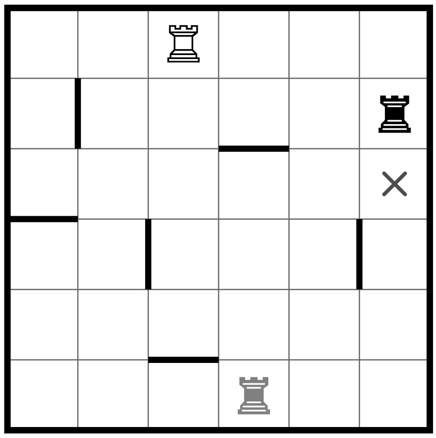
Das Beispiel zeigt, wie es gelingt, den schwarzen Turm in 4 Zügen auf das Kreuz zu ziehen:

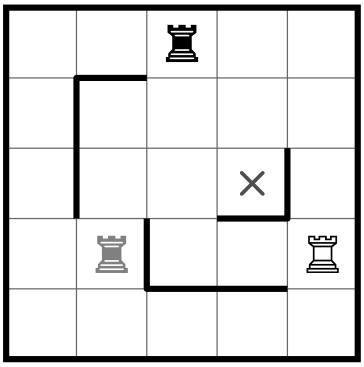


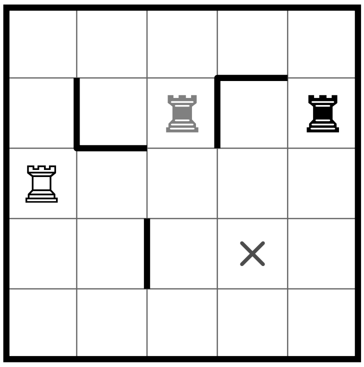
Wer schafft es, mit möglichst wenigen Zügen den schwarzen Turm auf das Kreuz zu ziehen?

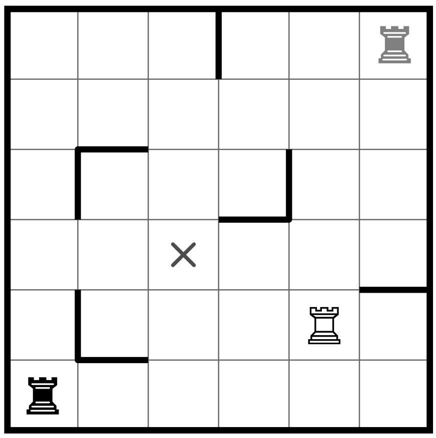


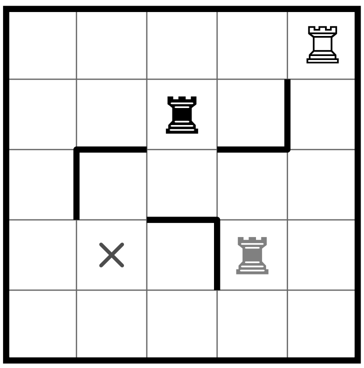


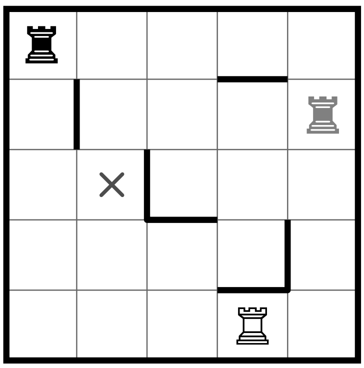








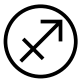


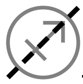


Wem gelingt es, statt des schwarzen Turms jeweils den weissen oder den grauen Turm auf das Kreuz zu ziehen?

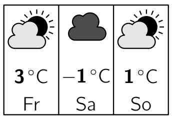
Klassenstufen 7 und 8

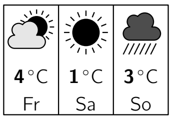
1. Welches der folgenden Symbole für Sternzeichen hat eine Symmetrieachse?

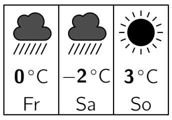
(**A**)  Skorpion (**B**)  Löwe (**C**)  Schütze (**D**)  Krebs (**E**)  Steinbock

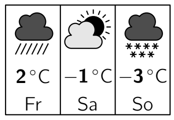
Lösung: Das Symbol für Schütze hat eine Symmetrieachse . Das Symbol für Krebs ist punktsymmetrisch, hat aber – wie auch die anderen Symbole – keine Symmetrieachse.

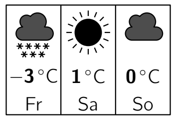
2. Benedikt schaut auf seine Wetter-App und bemerkt, dass die erwartete Höchsttemperatur in den nächsten drei Tagen von Tag zu Tag fällt. Was könnte Benedikts Wetter-App anzeigen?

(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

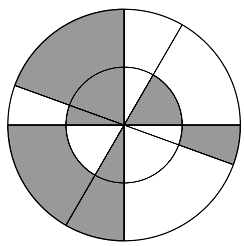
Lösung: In den Anzeigen (**A**), (**B**) und (**C**) ist es für den Sonntag wärmer vorhergesagt als für den Samstag. In (**E**) ist es für den Samstag wärmer vorhergesagt als für den Freitag. Einzig in (**D**) fällt die erwartete Höchsttemperatur in den angezeigten drei Tagen von Tag zu Tag.

3. $\dfrac{20 \cdot 21}{2+0+2+1} =$

(**A**) 42 (**B**) 56 (**C**) 64 (**D**) 80 (**E**) 84

Lösung: Es ist $\dfrac{20 \cdot 21}{2+0+2+1} = \dfrac{20 \cdot 21}{5} = \dfrac{4 \cdot \cancel{5} \cdot 21}{\cancel{5}} = 4 \cdot 21 = 84.$

4. Zwei Kreise mit demselben Mittelpunkt werden von vier Geraden durch den Mittelpunkt zerteilt. Wie viel Prozent der Fläche ist grau?



(**A**) 25 % (**B**) 40 % (**C**) 50 % (**D**) 60 % (**E**) 75 %

Lösung: Jede graue Teilfläche ist punktsymmetrisch zu einer weissen Teilfläche und umgekehrt. Also ist der graue Teil genauso gross wie der weisse Teil. Das heisst, 50 % der Gesamtfläche ist grau.

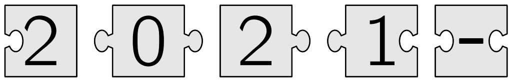
5. Mona und Remo wollen ihrer Mutter einen Strauss Rosen schenken. Sie wollen 15 Rosen kaufen, und zwar 4-mal so viele gelbe wie rote. Wie viele rote Rosen müssen in den Strauss gebunden werden?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

Lösung: Im Strauss sollen 4-mal so viele gelbe wie rote Rosen sein, also soll jede fünfte Rose rot sein. Das sind 15 : 5 = 3 rote Rosen.

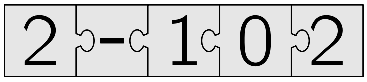
— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 6 gestellt. —

6. Wenn die fünf Puzzleteile korrekt zusammengefügt werden, ergibt sich ein Rechteck mit einer Rechenaufgabe. Was ist das Ergebnis dieser Rechenaufgabe?



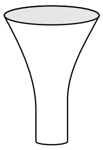
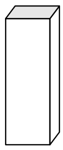
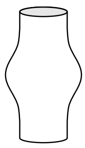
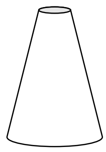
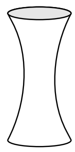
(**A**) −100 (**B**) −8 (**C**) −1 (**D**) 199 (**E**) 208

Lösung: Die beiden Teile mit einer 2 sind Randteile. An die linke 2 passt von den anderen Teilen nur das Minuszeichen und an die rechte 2 nur die 0. Demzufolge steht die 1 in der Mitte. Das Ergebnis der Rechenaufgabe ist $2 - 102 = -100$.



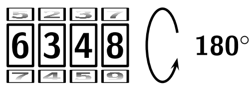
— In den Klassenstufen 3/4 und 5/6 gab es ähnliche Puzzleprobleme in Aufgabe 4 bzw. 2. —

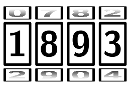
7. Jede der fünf Vasen hat dieselbe Höhe und lässt sich mit 1 Liter Wasser bis zum Rand füllen. Vivien füllt in jede Vase einen halben Liter Wasser. In welcher Vase steht das Wasser dann am höchsten?

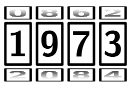
(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

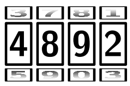
Lösung: Die Vasen (**B**), (**C**) und (**E**) sind symmetrisch zur Mitte der Höhe, und somit passt in die obere und in die untere Hälfte jeweils dieselbe Menge Wasser, das heisst, ein halber Liter. Ein halber Liter Wasser reicht bei diesen drei Vasen also genau bis zur Mitte. Vase (**D**) ist unten breiter als oben, bei ihr reicht der halbe Liter Wasser nicht einmal bis zur Mitte. Vase (**A**) ist unten schmaler als oben. Bis zur Mitte der Höhe passt in sie weniger Wasser als oberhalb der Mitte. Bei dieser Vase steht der halbe Liter Wasser also oberhalb der Mitte und somit am höchsten von allen fünf Vasen.

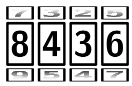
8. Ein Fahrradschloss hat vier Zahlenräder mit den Ziffern von 0 bis 9. Um die richtige Kombination zu erhalten, muss jedes der Zahlenräder der abgebildeten Einstellung um 180° gedreht werden. Wie sieht die richtige Kombination aus?

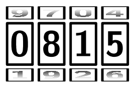


(**A**) 

(**B**) 

(**C**) 

(**D**) 

(**E**) 

Lösung: Auf jedem Zahlenrad stehen 10 Ziffern. Wenn wir ein Zahlenrad um 180° drehen, also um die Hälfte einer vollen Umdrehung, so drehen wir um genau 5 Ziffern weiter. Aus der 6 wird eine 1, aus der 3 eine 8, aus der 4 eine 9 und aus der 8 eine 3. Die richtige Kombination ist 1893.

— Ein ähnliches Problem wurde in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 14 gestellt. —

9. Im Südpolarmeer fand für die Pinguine ein Wetttauchen statt. Benno ist 5 s länger als Artur getaucht, aber 10 s kürzer als Curt. Dieter ist 10 s länger als Curt getaucht, aber 5 s kürzer als Egon. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(**A**) Artur und Egon sind gleich lange getaucht. (**B**) Artur ist 10 s länger als Egon getaucht.
(**C**) Artur ist 10 s kürzer als Egon getaucht. (**D**) Artur ist 30 s länger als Egon getaucht.
(**E**) Artur ist 30 s kürzer als Egon getaucht.

Lösung: Die Anfangsbuchstaben der Namen ergeben genau die Reihenfolge, die den Tauchzeiten entspricht, denn mit dem 1. Satz ergibt sich die Reihenfolge Artur, Benno, Curt (von kurz nach lang) und mit dem 2. Satz die Reihenfolge Curt, Dieter, Egon (ebenfalls von kurz nach lang). Somit ist die Reihenfolge der Pinguine entsprechend ihrer Tauchzeit Artur, Benno, Curt, Dieter, Egon, wobei Artur am kürzesten getaucht ist. Durch Aufsummieren der Zeitdifferenzen erhalten wir den Unterschied der Tauchzeiten von Artur und Egon: Artur ist $5\,\text{s} + 10\,\text{s} + 10\,\text{s} + 5\,\text{s} = 30\,\text{s}$ kürzer als Egon getaucht.

10. Die Buchstaben M, E, D und O stehen in beiden Rechnungen jeweils für dieselbe Ziffer. Was ist das Ergebnis der zweiten Rechnung?

$$\begin{array}{r} \mathbf{M\,E} \\ +\,\mathbf{D\,O} \\ \hline \mathbf{1\,3\,7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{M\,O\,D\,E} \\ +\,\mathbf{D\,E\,M\,O} \\ \hline \end{array}$$

(**A**) 14737 (**B**) 13837 (**C**) 14747 (**D**) 23737 (**E**) 137137

Lösung: Bei der schriftlichen Addition können wir Ziffern, die übereinander stehen, vertauschen, ohne das Ergebnis zu ändern. Vertauschen wir in der zweiten Rechnung das erste O mit dem E und das zweite D mit dem M, so stehen in beiden Summanden die Ziffern aus der ersten Rechnung zweimal hintereinander. Wir erhalten das Ergebnis, wie rechts abgebildet. Die Aufgabe lässt sich auch lösen, wenn man mithilfe der ersten Rechnung die Buchstaben durch geeignete Ziffern ersetzt.

$$\begin{array}{r} \mathbf{M\,E\,M\,E} \\ +\,\mathbf{D\,O\,D\,O} \\ \hline \mathbf{1\,3\,7} \\ \mathbf{1\,3\,7} \\ \hline \mathbf{1\,3\,8\,3\,7} \end{array}$$

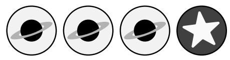
11. Eine rechteckige Tafel Schokolade besteht aus gleich grossen, quadratischen Stückchen. Nico bricht sich eine Reihe mit 5 Stückchen ab. Danach bricht sich Janina vom Rest zwei Reihen mit insgesamt 6 Stückchen ab. Wie viele Stückchen sind noch übrig?

(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 12

Lösung: Nachdem sich Nico eine Reihe mit 5 Stückchen abgebrochen hat, verbleibt ein Rest, der 5 Stückchen lang ist. Danach bricht sich Janina 2 Reihen mit jeweils 3 Stückchen ab, also war der Rest 3 Stückchen breit. Der verbleibende Rest ist nun 3 Stückchen breit und $5 - 2 = 3$ Stückchen lang, da 2 Reihen abgebrochen wurden. Es sind also noch $3 \cdot 3 = 9$ Stückchen übrig. Das Bild zeigt die Tafel Schokolade mit den Stückchen, die Nico (N) und Janina (J) jeweils abgebrochen haben.

N	N	N	N	N
			J	J
			J	J
			J	J

12. Fünf Freunde sammeln drei Sorten Astro-Anstecker: Planeten , Monde  und Sterne . Kathryns Anstecker sind zur Hälfte Planeten. Chris hat mehr Monde als Sterne. Philippa hat keine Monde. James hat eine gerade Anzahl von Ansteckern. Jean-Luc hat mehr Sterne als Planeten. Die folgenden Bilder zeigen die Anstecker der fünf Freunde. Welche Anstecker gehören Jean-Luc?

(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

Lösung: Kathryns Anstecker sind zur Hälfte Planeten, das trifft nur auf (**C**) zu. Chris hat mehr Monde als Sterne, das trifft von den verbliebenen Sammlungen nur auf (**D**) zu. James hat eine gerade Anzahl von Ansteckern, das ist bei den verbliebenen Sammlungen nur bei (**A**) der Fall. Von den beiden nun verbliebenen Sammlungen enthält nur (**B**) keine Monde und gehört folglich zu Philippa. Jean-Lucs Anstecker sind bei (**E**) zu sehen.

13. Wenn zwei Ziffern der Zahl 337337 gestrichen werden, bilden die restlichen vier Ziffern (in derselben Reihenfolge) eine vierstellige Zahl. Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen können so entstehen?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

Lösung: Wir schreiben die vierstelligen Zahlen, die entstehen können, systematisch auf und unterscheiden dabei danach, welche der Siebenen gestrichen werden. Wir müssen beachten, dass in einigen Fällen das Streichen von verschiedenen Dreien zur selben Zahl führt.

beide Siebenen:	3333		
nur die vordere Sieben:	3337		
nur die hintere Sieben:	3373	3733	
keine Sieben:	7337	3737	3377

Es können 7 verschiedene vierstellige Zahlen entstehen.

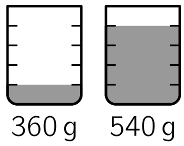
14. Aus 25 Holzbrettern, jedes 20 cm breit, baut Ricarda einen Zaun. Der Zaun soll 4,40 m lang werden. Dabei sollen sich die Bretter wie abgebildet immer um dieselbe Breite überlappen.

Wie breit muss die Überlappung jeweils sein, damit der Zaun die gewünschte Länge hat?

(**A**) 2,5 cm (**B**) 2,8 cm (**C**) 3 cm (**D**) 4,7 cm (**E**) 5 cm

Lösung: Zunächst stellen wir fest, dass sich die 25 Bretter an 24 Stellen überlappen. Würden wir die 25 Bretter ohne Überlappung aneinanderfügen, so wäre der Zaun $25 \cdot 20\,\text{cm} = 500\,\text{cm} = 5{,}00\,\text{m}$ lang. Durch die 24 Überlappungen müssen insgesamt $5{,}00\,\text{m} - 4{,}40\,\text{m} = 60\,\text{cm}$ eingespart werden. Also ist jede Überlappung $60\,\text{cm} : 24 = 2{,}5\,\text{cm}$ breit.

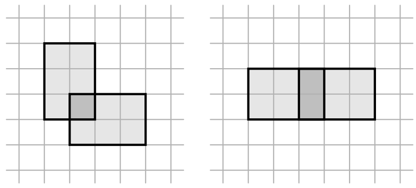
15. Ein Glas, das zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist, wiegt 360 g. Wird dasselbe Glas zu vier Fünfteln mit Wasser gefüllt, so wiegt es 540 g. Wie viel wiegt das leere Glas?



(**A**) 100 g (**B**) 120 g (**C**) 180 g (**D**) 250 g (**E**) 300 g

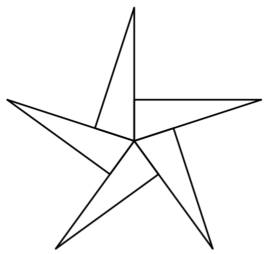
Lösung: Wenn wir aus dem volleren Glas, das zu vier Fünfteln mit Wasser gefüllt ist, drei Fünftel wegschütten, erhalten wir das leerere Glas, das zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Also entsprechen die drei Fünftel Wasser der Differenz $540\,\text{g} - 360\,\text{g} = 180\,\text{g}$. Das verbliebene eine Fünftel Wasser entspricht damit $180\,\text{g} : 3 = 60\,\text{g}$. Schütten wir dieses aus, bleibt das leere Glas mit $360\,\text{g} - 60\,\text{g} = 300\,\text{g}$ übrig.

Auf Kästchenpapier legt Hajo 2×3-Rechtecke aus Pappe und zwar immer so, dass sie genau in das Raster des Kästchenpapiers passen. Dabei dürfen sich die Rechtecke überlappen, wie die beiden Beispiele rechts zeigen.



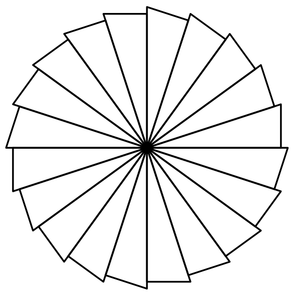
Welche Anzahlen an Kästchen können so insgesamt überdeckt werden? Welche Anzahlen sind nicht möglich? Welche Anzahlen sind möglich, wenn Hajo anstatt der 2×3-Rechtecke grössere Rechtecke nimmt, nämlich Rechtecke der Grösse 3×4, 3×5, 3×6 oder 5×7?

16. Fünf identische rechtwinklige Dreiecke können so angeordnet werden, dass die grösseren spitzen Winkel in der Mitte aneinanderstossen und den abgebildeten Stern bilden. Es ist auch möglich, eine grössere Anzahl dieser Dreiecke so anzuordnen, dass jeweils die kleineren spitzen Winkel in der Mitte aneinanderstossen. Wie viele Dreiecke sind dafür nötig?



(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 24

Lösung: Im Stern, der in der Aufgabe abgebildet ist, treffen in der Mitte 5 der grösseren spitzen Winkel zusammen, also muss der grössere spitze Winkel jeweils $360° : 5 = 72°$ gross sein. Der kleinere spitze Winkel ist folglich $180° - 90° - 72° = 18°$ gross. Da $360° : 18° = 20$ ist, lassen sich 20 dieser Dreiecke mit den kleineren spitzen Winkeln in der Mitte zusammenlegen. Es entsteht die rechts abgebildete Figur.



17. Beim Koala-Wettbewerb werden 20 Fragen gestellt. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es 7 Punkte und für jede falsch beantwortete -4 Punkte. Für unbeantwortete Fragen gibt es 0 Punkte. Ava hat genau 100 Punkte erreicht. Wie viele Fragen hat sie nicht beantwortet?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) vier

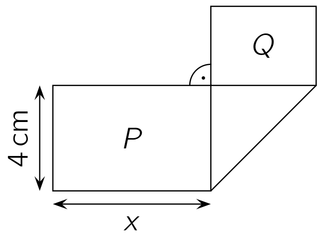
Lösung: Die Punktzahl für jede falsche Antwort ist gerade, und die Punktzahl für jede richtige Antwort ist ungerade. Da Avas Gesamtpunktzahl 100 gerade ist, hat sie eine gerade Anzahl an Pluspunkten erhalten. Also ist die Anzahl der richtigen Antworten gerade. Ausserdem muss sie mehr als 14 Fragen richtig beantwortet haben, denn $14 \cdot 7 = 98 < 100$. Hätte sie jedoch mindestens 18 Fragen richtig beantwortet, so hätte sie mindestens $18 \cdot 7 + 2 \cdot (-4) = 118$ Punkte bekommen, also zu viele. Ava hat also 16 Fragen richtig beantwortet, wofür sie $16 \cdot 7 = 112$ Punkte bekam. Folglich hat sie $(112 - 100) : 4 = 3$ Fragen falsch beantwortet. Eine Aufgabe hat sie nicht beantwortet.

Was ist die Maximalpunktzahl, die bei dem in Aufgabe 17 beschriebenen Wettbewerb erreicht werden kann?

Nicht alle Zahlen, die kleiner als die Maximalpunktzahl sind, können auch tatsächlich als Gesamtpunktzahl erreicht werden.

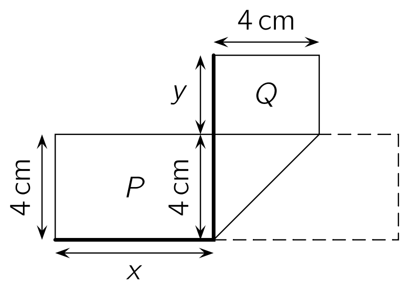
Welches ist die kleinste positive Zahl, die nicht als Gesamtpunktzahl in Frage kommt?

18. Ein rechteckiger Streifen Papier, 13 cm lang und 4 cm breit, wurde einmal gefaltet (siehe Bild). Die dabei entstandenen Rechtecke haben die Flächeninhalte P und Q, wobei P doppelt so gross wie Q ist. Wie gross ist x?



(**A**) 5 cm (**B**) 5,5 cm (**C**) 6 cm (**D**) 6,5 cm (**E**) 7 cm

Lösung: Wir zeichnen in das Bild den ursprünglichen Papierstreifen ein. Wir sehen, dass die kurze Seite des Streifens jeweils so lang wie eine Seitenlänge der Rechtecke ist. Die gesamte Länge des Streifens lässt sich in die beiden Seitenlängen x und y der Rechtecke aufteilen und in die Länge der Überlappung, die der Länge der kurzen Seite des Papierstreifens entspricht. Also ist $13\,\text{cm} = x + y + 4\,\text{cm}$. Da $P = 2Q$ ist und beide Rechtecke eine Seite haben, die 4 cm lang ist, folgt $x = 2y$ und somit $y = 0{,}5x$. Einsetzen in die erste Gleichung führt zu $9\,\text{cm} = 1{,}5x$. Damit ist $x = 9\,\text{cm} : 1{,}5 = 6\,\text{cm}$.

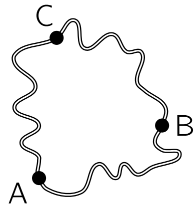


19. In unserem Angelverein sind 25 Profis und 51 Amateure. Für das Paarangeln wurden sie in Paare aufgeteilt. Wenn ein Amateur und ein Profi zusammen angeln mussten, waren beide Angler unglücklich. In allen anderen Paaren waren beide Angler glücklich. Nach dem Angeln gaben 58 Angler an, glücklich mit ihrem Partner gewesen zu sein, der Rest war es nicht. Wie viele reine Amateurpaare gab es?

(**A**) 15 (**B**) 17 (**C**) 19 (**D**) 21 (**E**) 24

Lösung: Am Paarangeln nahmen insgesamt $25 + 51 = 76$ Angler teil. Davon waren 58 glücklich und folglich $76 - 58 = 18$ unglücklich. Also gab es 9 gemischte Paare mit 9 Amateuren (und 9 Profis). Die restlichen $51 - 9 = 42$ Amateure waren in reinen Amateurpaaren, das waren demzufolge 21 Paare.

20. Drei Dörfer sind durch Wanderwege verbunden. Der direkte Weg von A nach C ist 1 km kürzer als der Umweg über B. Der direkte Weg von A nach B ist 5 km kürzer als der Umweg über C. Der direkte Weg von B nach C ist 7 km kürzer als der Umweg über A. Wie lang ist der kürzeste der drei direkten Wege zwischen den Dörfern?



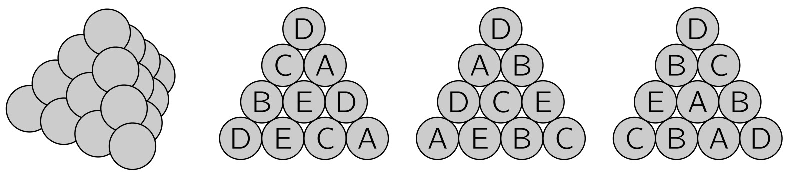
(**A**) 1 km (**B**) 2 km (**C**) 3 km (**D**) 4 km (**E**) 5 km

Lösung: Würden wir jeden Umweg einmal laufen, dann wäre das so, als würden wir jeden direkten Weg zweimal gehen. Ausserdem wären das insgesamt $1\,\text{km} + 5\,\text{km} + 7\,\text{km} = 13\,\text{km}$ mehr, als würden wir die direkten Wege, also jeden einmal, nehmen. Also entsprechen die 13 km genau der Summe der Längen der direkten Wege. Daraus folgt, dass zum kürzesten der direkten Wege der längste Umweg und insbesondere der grösste Unterschied zwischen Umweg und direktem Weg gehört, also 7 km. Der kürzeste direkte Weg ist also zwischen B und C.
Nun können wir uns vorstellen, dass wir in B starten und zuerst den Umweg über A nach C nehmen und dann auf direktem Weg zurück nach B gehen. Dann gehen wir zuerst die Länge des Umwegs, also die des direkten Wegs und zusätzlich 7 km (das ist zusammen genau die Länge des Umwegs), und anschliessend noch einmal die Länge des direkten Wegs. Insgesamt sind das 13 km, und der direkte Weg von B nach C ist folglich $(13\,\text{km} - 7\,\text{km}) : 2 = 3\,\text{km}$ lang.
Die anderen Wegstrecken lassen sich analog als 4 km und 6 km bestimmen.
Wer schon mit Gleichungen umgehen kann, kann die Aufgabe auch so lösen: Wir bezeichnen die Längen der direkten Wege mit a, b und c, stellen mit den gegebenen Bedingungen drei Gleichungen auf und lösen das entstehende Gleichungssystem.

Sandy schreibt die Jahreszahl 2021 als Summe von fünf natürlichen Zahlen, deren Ziffern nur Fünfen und Neunen sind.

Wie viele Neunen verwendet Sandy insgesamt für die fünf Summanden?

21. Im Pralinenladen ist eine dreiseitige Pyramide aus 20 runden Trüffeln aufgebaut, je 4 Stück von 5 Sorten. Im Bild ist für jede Seitenfläche angegeben, zu welcher Sorte die Trüffel gehören. Von welcher Sorte ist der von aussen nicht sichtbare Trüffel, der in der Mitte der Grundfläche liegt?



(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

Lösung: Der Trüffel an der Spitze ist in den drei Seitenansichten insgesamt dreimal zu sehen und die Trüffel an den drei Kanten der Pyramide jeweils zweimal. Also können wir in den Bildern zweimal das D an der Spitze und immer je eine der beiden gleichen Kanten streichen. Zählen wir nun die verbliebenen Trüffel pro Sorte, erhalten wir für D nur 3 Exemplare. Unten in der Mitte der Grundfläche liegt also der vierte Trüffel von der Sorte D.

— Ein ähnliches, etwas einfacheres Problem wurde in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 13 gestellt. —

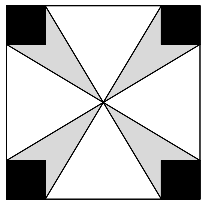
Wer findet 8 ganze Zahlen (es müssen nicht alle verschieden sein), deren Summe und auch deren Produkt jeweils gleich 8 ist?

22. Franziska und Sergej teilen 22 Äpfel und 11 Birnen so auf, dass Franziska genau doppelt so viele Früchte wie Sergej bekommt. Welche der folgenden Aussagen ist <u>sicher</u> richtig?

(**A**) Franziska bekommt mindestens eine Birne.
(**B**) Franziska bekommt doppelt so viele Äpfel wie Birnen.
(**C**) Franziska bekommt doppelt so viele Äpfel wie Sergej.
(**D**) Franziska bekommt genauso viele Äpfel wie Sergej Birnen.
(**E**) Franziska bekommt genauso viele Birnen wie Sergej Äpfel.

Lösung: Dass (**A**) nicht gelten muss, sehen wir schnell, denn Franziska könnte alle 22 Äpfel und keine Birne bekommen haben. Mit dieser Aufteilung sehen wir, dass auch (**B**), (**C**) und (**D**) nicht unbedingt gelten müssen. Nur (**E**) kommt damit als Lösung in Frage.
Dass das auch tatsächlich stets der Fall ist, sehen wir so: Es sind insgesamt 33 Früchte vorhanden, die im Verhältnis 2 : 1 aufgeteilt werden sollen. Franziska bekommt also 22 Früchte und Sergej 11. Wir nehmen an, dass Franziska b Birnen bekommt. Dann muss sie $22 - b$ Äpfel bekommen, damit sie insgesamt 22 Früchte hat. Die restlichen Birnen und Äpfel gehen an Sergej, also $11 - b$ Birnen und $22 - (22 - b) = b$ Äpfel. Franziska bekommt demzufolge sicher genauso viele Birnen wie Sergej Äpfel.
— *Ein ähnliches, etwas einfacheres Problem wurde in Klassenstufe 5/6 in Aufgabe 16 gestellt.* —

23. Der Flächeninhalt des grossen Quadrats im Bild beträgt $25\,\text{cm}^2$. Jedes der kleinen schwarzen Quadrate ist $1\,\text{cm}^2$ gross. Welchen Flächeninhalt haben die vier grauen Bereiche zusammen?



(**A**) $6\,\text{cm}^2$ (**B**) $6{,}5\,\text{cm}^2$ (**C**) $7\,\text{cm}^2$ (**D**) $7{,}5\,\text{cm}^2$ (**E**) $8\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir berechnen den Flächeninhalt der grauen Fläche, indem wir den Flächeninhalt der weissen und der schwarzen Fläche vom Flächeninhalt des grossen Quadrats abziehen.
Die vier weissen Dreiecke sind zueinander kongruent. Als Grundseite haben sie eine lange Quadratseite vermindert um zwei kleine Quadratseiten. Die Grundseite ist also $5\,\text{cm} - 2 \cdot 1\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$ lang. Die dazugehörige Höhe ist halb so lang wie die lange Quadratseite, das sind $5\,\text{cm} : 2 = 2{,}5\,\text{cm}$. Die vier weissen Dreiecke sind also zusammen $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 2{,}5\,\text{cm} = 15\,\text{cm}^2$ gross. Die vier grauen Bereiche haben zusammen einen Flächeninhalt von $25\,\text{cm}^2 - 15\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 1\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.
Der Flächeninhalt der grauen Bereiche lässt sich auch direkt berechnen, indem wir jedes graue Viereck durch eine Diagonale halbieren. Wählen wir für jedes dabei entstehende graue Dreieck als Grundseite die Seite des schwarzen Quadrats, so ist die zugehörige Höhe 1,5 cm lang. Die vier grauen Bereiche haben somit zusammen einen Flächeninhalt von $8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1\,\text{cm} \cdot 1{,}5\,\text{cm}\right) = 4 \cdot 1{,}5\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$.

24. Multiplizieren wir die 6-stellige Zahl $1ABCDE$ mit 3, so erhalten wir als Ergebnis die 6-stellige Zahl $ABCDE1$. Welchen Wert hat $A + B + C + D + E$?

(**A**) 23 (**B**) 26 (**C**) 29 (**D**) 32 (**E**) 35

$$\begin{array}{r} 1\ A\ B\ C\ D\ E\ \cdot\ 3 \\ \hline A\ B\ C\ D\ E\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ A\ B\ C\ D\ 7\ \cdot\ 3 \\ \hline A\ B\ C\ D\ 7\ 1 \end{array}$$

Lösung: Wir ermitteln die Ziffern der sechsstelligen Zahl $1ABCDE$ und beginnen bei E. Da $E \cdot 3$ auf 1 endet, muss $E = 7$ sein.
Da $7 \cdot 3 = 21$ ist, gibt es einen Übertrag 2. Also endet $D \cdot 3 + 2$ auf 7. Das ist nur für $D = 5$ möglich.
Analog berechnen wir nacheinander $C = 8$, $B = 2$ und schliesslich $A = 4$.
Tatsächlich gilt $142857 \cdot 3 = 428571$, und wir erhalten $A + B + C + D + E = 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 26$.
Wir geben noch eine Lösungsvariante an: Wenn wir die Zahl $ABCDE$ mit x bezeichnen, können wir die Bedingung aus der Aufgabe als Gleichung $(100000 + x) \cdot 3 = 10x + 1$ schreiben. Auflösen nach x führt über $300000 + 3x = 10x + 1$ zu $x = 299999 : 7 = 42857$.

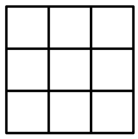
25. Eine Box enthält nur grüne, rote, schwarze und blaue Chips. Nehme ich 27 Chips aus der Box, so ist mindestens ein grüner dabei. Nehme ich 25 Chips aus der Box, so ist mindestens ein roter dabei. Nehme ich 22 Chips aus der Box, so ist mindestens ein schwarzer dabei. Nehme ich 17 Chips aus der Box, so ist mindestens ein blauer dabei. Wie viele Chips sind höchstens in der Box?

(**A**) 27 (**B**) 29 (**C**) 51 (**D**) 87 (**E**) 91

Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der grünen, roten, schwarzen und blauen Chips mit g, r, s und b. Da bei 27 Chips mindestens ein grüner dabei ist, können es höchstens 26 Chips sein, die nicht grün, also rot, schwarz oder blau sind, das heisst $r + s + b \leq 26$. Analog erhalten wir die Ungleichungen $g + s + b \leq 24$, $g + r + b \leq 21$ und $g + r + s \leq 16$. Addieren wir die vier Ungleichungen, so erhalten wir nach Umsortieren und Ausklammern $3 \cdot (g + b + r + s) \leq 87$ und damit $g + b + r + s \leq 29$. Es können nicht mehr als 29 Chips in der Box sein.
Bei 29 Chips werden alle Ungleichungen zu Gleichungen und wir können ausrechnen, dass es dann 3 grüne, 5 rote, 8 schwarze und 13 blaue Chips sein müssen. Mit diesen Anzahlen sind alle gegebenen Bedingungen erfüllt.

Auf die 9 Felder sollen 8 Münzen so verteilt werden, dass in jeder Reihe (senkrecht und waagerecht) eine andere Gesamtzahl an Münzen liegt.

Wer findet mehrere Möglichkeiten?



26. Die Oberfläche des abgebildeten Fussballs besteht aus schwarzen Fünfecken und weissen Sechsecken, die regelmässig angeordnet sind. Es sind insgesamt 12 Fünfecke. Wie viele Sechsecke sind es?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 24

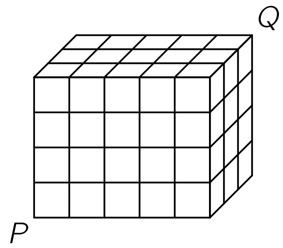
Lösung: Zu jedem Fünfeck gehören 5 Kanten des Fussballs. Es gibt also insgesamt $12 \cdot 5 = 60$ Kanten, die zu einem Fünfeck gehören. Zu jedem Sechseck gehören 3 Kanten, die gleichzeitig auch zu einem Fünfeck gehören. Also sind es $60 : 3 = 20$ Sechsecke.

27. In einer Fabrik werden Eier mit den Farben rot, blau und gelb bemalt. Unter 3 aufeinanderfolgenden Eiern soll jede Farbe einmal vorkommen. Bei der Qualitätskontrolle wird notiert: „Ei 2 ist gelb, Ei 20 ist gelb, Ei 202 ist rot, Ei 1002 ist blau und Ei 2021 ist blau.“ Die Chefin bemerkt sofort, dass genau eines dieser fünf Eier falsch gefärbt ist. Welche Nummer hat das falsch gefärbte Ei?

(**A**) 2 (**B**) 20 (**C**) 202 (**D**) 1002 (**E**) 2021

Lösung: Da unter 3 aufeinanderfolgenden Eiern jede Farbe einmal vorkommen soll, muss das 1. Ei dieselbe Farbe haben wie das 4., 7., 10., usw., das 2. Ei dieselbe Farbe wie das 5., 8., 11., usw. und das 3. Ei dieselbe Farbe wie das 6., 9., 12., usw. Eier, deren Nummern beim Teilen durch 3 denselben Rest lassen, sollen also dieselbe Farbe haben. Die Nummern 2, 20 und 2021 lassen beim Teilen durch 3 jeweils den Rest 2. Während Ei 2 und Ei 20 gelb sind, ist Ei 2021 blau. Da nur genau eines der fünf Eier falsch gefärbt ist, muss es das Ei 2021 sein. Es hätte gelb gefärbt werden müssen.
Da beim Teilen durch 3 die Zahl 202 den Rest 1 und die Zahl 1002 den Rest 0 lässt, sind die Eier 202 und 1002 richtigerweise anders gefärbt als die Eier 2 und 20.

28. Ein $3 \times 4 \times 5$-Quader besteht aus 60 identischen kleinen Holzwürfeln. Holzwurm Willy frisst sich entlang der Raumdiagonalen von P nach Q. Diese Raumdiagonale schneidet im Inneren des Quaders keine Kante der kleinen Würfel. Durch wie viele kleine Würfel verläuft der Weg von Holzwurm Willy?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

Lösung: Jedes Mal, wenn die Raumdiagonale von P nach Q auf eine Seitenfläche eines kleinen Würfels trifft, verlässt Willy einen Würfel und frisst sich in einen neuen Würfel. Da die Raumdiagonale im Inneren des Quaders keine Kante der kleinen Würfel schneidet, frisst sich Willi, immer wenn er einen Würfel verlässt, als nächstes entweder in den Würfel rechts daneben, in den darüber oder in den dahinter. Da der Quader 5 Würfel breit ist, frisst sich Willy 4-mal in den Würfel rechts daneben. Da der Quader 4 Würfel hoch ist, frisst er sich 3-mal in den Würfel darüber. Und da der Quader 3 Würfel tief ist, frisst er sich 2-mal in den Würfel dahinter.
Holzwurm Willy frisst sich also im Inneren $4+3+2=9$-mal in einen neuen Würfel. Dazu kommt der erste Würfel, bei dem Willy startet. Insgesamt verläuft Willys Weg also durch 10 kleine Würfel.

29. Bei einem Turnier spielt jedes der sechs Teams gegen jedes andere Team genau einmal. An jedem Spieltag finden drei Spiele gleichzeitig statt. Ein TV-Sender hat für jeden Spieltag ein Spiel festgelegt, das live übertragen werden soll (siehe Tabelle). An welchem Spieltag wird D gegen F spielen?

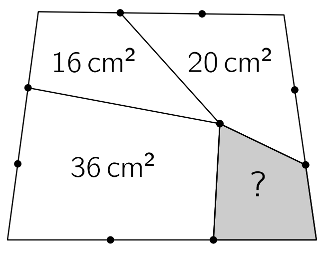
1	2	3	4	5
C – D	A – E	E – F	A – B	A – C

(**A**) am 1. (**B**) am 2. (**C**) am 3. (**D**) am 4. (**E**) am 5.

Lösung: Von Mannschaft A ergänzen wir in der Tabelle die Spiele gegen D und F an den Spieltagen 1 und 3. Da am 1. Spieltag bereits D gegen C spielt, muss am 1. Spieltag A – F stattfinden sowie mit den noch fehlenden Teams B – E. Am 3. Spieltag finden demzufolge A – D und B – C statt. Von Mannschaft C müssen wir noch die Spiele gegen E und F an den Spieltagen 2 und 4 finden. Da am 2. Spieltag bereits E gegen A spielt, muss C – E am 4. Spieltag stattfinden und damit auch D – F am 4. Spieltag. Die vollständige Tabelle ist abgebildet.

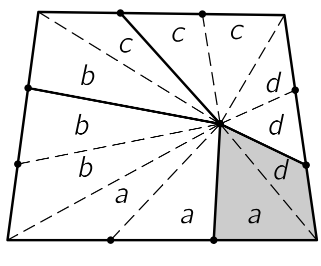
1	2	3	4	5
C – D	A – E	E – F	A – B	A – C
A – F	C – F	A – D	C – E	B – F
B – E	B – D	B – C	**D – F**	D – E

30. Die Seiten des abgebildeten Vierecks wurden gedrittelt und pro Seite wurde einer der Teilungspunkte wie abgebildet mit einem Punkt im Inneren verbunden. Dadurch wurde das Viereck in vier kleinere Vierecke zerlegt. Die Zahlen in den Vierecken geben an, welchen Flächeninhalt das jeweilige Viereck hat. Welchen Flächeninhalt hat das graue Viereck?



(**A**) $11\,\text{cm}^2$ (**B**) $12\,\text{cm}^2$ (**C**) $13\,\text{cm}^2$ (**D**) $14\,\text{cm}^2$ (**E**) $15\,\text{cm}^2$

Lösung: Wir verbinden den Punkt im Inneren mit den Teilungspunkten und den Eckpunkten des grossen Vierecks. Die drei zu einer Vierecksseite gehörenden Dreiecke sind jeweils gleich gross, denn ihre Grundseiten sind gleich lang (jede Vierecksseite wurde gedrittelt) und die entsprechende Höhe ist jeweils dieselbe. Die Flächeninhalte der Dreiecke bezeichnen wir wie im Bild angegeben.



Wir berechnen die Summe $a+b+c+d$, indem wir die Flächeninhalte der beiden Vierecke unten links und oben rechts addieren. Wir erhalten $36\,\text{cm}^2 + 20\,\text{cm}^2 = 2a + 2b + 2c + 2d$, woraus $a+b+c+d = 28\,\text{cm}^2$ folgt. Weil für das Viereck oben links $b+c = 16\,\text{cm}^2$ gilt, ist der gesuchte Flächeninhalt $a+d = 28\,\text{cm}^2 - 16\,\text{cm}^2 = 12\,\text{cm}^2$.

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 3 und 4 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	C	A	C	B	E	D	B	B
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	C	D	D	A	E	D	A	E
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	A	D	E	B	E	D	E	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 5 und 6 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Antwort	D	B	A	A	A	C	C	D
Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
Antwort	C	E	B	D	A	D	E	D
Aufgabe	17	18	19	20	21	22	23	24
Antwort	C	A	A	C	B	E	D	C

Die Lösungsbuchstaben für die Aufgaben der Klassenstufen 7 und 8 sind:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	C	D	E	C	B	A	A	A	E	B
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	D	E	B	A	E	D	B	C	D	C
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	E	A	B	B	D	E	C	D	B

(In den Klassenstufen 7 und 8 wurde bei Aufgabe 11 auch die Antwort A als richtig gewertet.)

Die **digitale Ausgabe** dieser Broschüre als PDF einschliesslich der Lösungen der Extra-Knobeleien ist hier zu finden.

2021